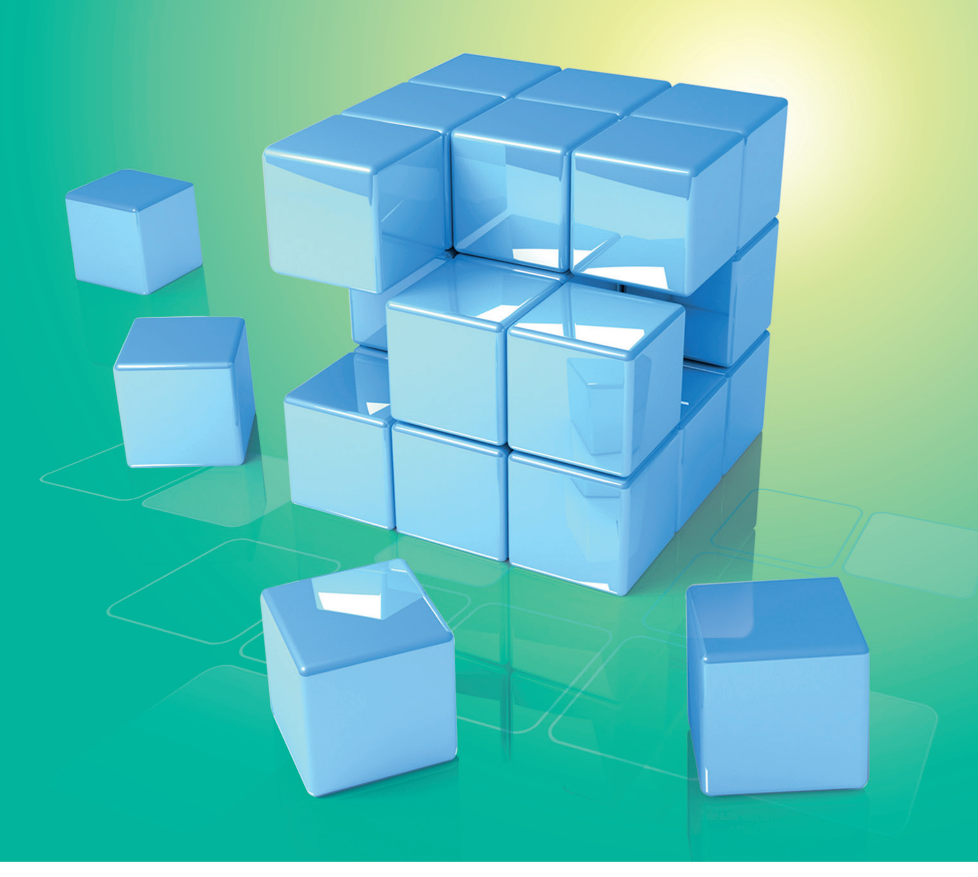
Trigonometría

Actividades

Cuarto grado
de Secundaria









Trigonometría
Libro de actividades
Cuarto grado de Secundaria
Colección Intelectum Evolución

© Ediciones Lexicom S. A. C. - Editor
RUC 20545774519
Jr. Dávalos Lissón 135, Cercado de Lima
Teléfonos: 331-1535 / 331-0968 / 332-3664
Fax: 330 - 2405
E-mail: ventas_escolar@edicioneslexicom.com
www.editorialsanmarcos.com

Responsable de edición:
Yisela Rojas Tacuri

Equipo de redacción y corrección:
Josué Dueñas Leyva / Christian Yovera López
Marcos Pianto Aguilar / Julio Julca Vega
Óscar Díaz Huamán / Kristian Huamán Ramos
Saby Camacho Martinez / Eder Gamarra Tiburcio
Jhonatan Peceros Tinco

Diseño de portada:
Miguel Mendoza Cruzado / Cristian Cabezudo Vicente

Retoque fotográfico:
Luis Armestar Miranda

Composición de interiores:
Lourdes Zambrano Ibarra / Natalia Mogollón Mayurí
Roger Urbano Lima

Gráficos e Ilustraciones:
Juan Manuel Oblitas / Ivan Mendoza Cruzado

Primera edición 2013
Tiraje: 15 000

Hecho el depósito legal en la Biblioteca Nacional del Perú
N.º 2013-12004
ISBN: 978-612-313-060-2
Registro de Proyecto Editorial N.º 31501001300690

Impreso en Perú / *Printed in Peru*

Pedidos:
Av. Garcilaso de la Vega 978 - Lima.
Teléfonos 331-1535 / 331-0968 / 332-3664
E-mail: ventas_escolar@edicioneslexicom.com

Impresión:
Editorial San Marcos, de Aníbal Jesús Paredes Galván
Av. Las Lomas 1600, Urb. Mangomarca, Lima, S.J.L.
RUC 10090984344

Este libro se terminó de imprimir
en los talleres gráficos de Editorial San Marcos situados en
Av. Las Lomas 1600, Urb. Mangomarca, S.J.L. Lima, Perú
RUC 10090984344

La Colección Intelectum Evolución para Secundaria ha sido concebida a partir de los lineamientos pedagógicos establecidos en el Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular, además se alinea a los patrones y estándares de calidad aprobados en la Resolución Ministerial N.º 0304-2012-ED.

La divulgación de la Colección Intelectum Evolución se adecúa a lo dispuesto en la Ley 29694, modificada por la Ley N.º 29839, norma que protege a los usuarios de prácticas ilícitas en la adquisición de material escolar.

El docente y el padre de familia orientarán al estudiante en el debido uso de la obra.



Contenido


Trigonometría
Trigonometría
Trigonometría
Trigonometría
Unidad 1
Trigonometría
Trigonometría

RECUERDA

Menelao de Alejandría.

Nació en Alejandría (Egipto).
Aunque sabemos poco de su vida, sabemos por Ptolomeo de las observaciones astronómicas que realizó. También aparece en una obra de Plutarco que describe una conversación que tuvo con Lucio.

Playfair, John [1748-1819].

Nació en Benvié, Escocia. Era el hijo mayor del reverendo James Playfair. Su padre lo educó hasta los 14 años, después fue a la Universidad de St. Andrews para graduarse y unirse a la Iglesia. Su progreso en las ciencias matemáticas fue tan rápido que sustituyó a su profesor de física cuando se puso enfermo. En 1785 se le nombró profesor asociado de matemáticas en la Universidad de Edimburgo. Estandarizó la notación de los puntos y lados de las figuras de los primeros seis libros de la edición de Euclides. A estos añadió otros tres como suplemento, y añadió una sección de notas como apéndices en la que daba sus razones por haber alterado los volúmenes anteriores y una exposición brillante en el complicado asunto de las líneas paralelas. Murió en 1819 en Burntisland, Escocia.

Proclo de Alejandría [410-485].

Matemático griego, nació en Constantinopla y murió en Atenas. Proclo fue, prácticamente, el último científico pagano de cierta entidad, y por su paganismo fue expulsado de Atenas y su exilio se prolongó durante un año. Entre sus escritos Proclo incluyó comentarios sobre Ptolomeo y Euclides y es aquí donde radica su importancia en la matemática, sobre todo para la primitiva geometría griega.

Riemann, George Friedrich Bernhard [1826-1866].

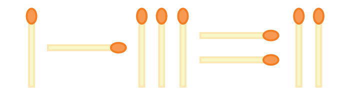
Nació en Breselenz, Hanover (ahora Alemania). Su padre era un ministro luterano que actuó como profesor de sus hijos hasta que Bernhard tenía 10 años. En 1840 entró directamente en el Liceo de Hannover, donde fue un buen alumno, aunque no destacó. Mostró un claro interés en las matemáticas. El trabajo de Riemann se basó siempre en el razonamiento intuitivo, y le faltó algo del rigor necesario para que sus conclusiones fueran indiscutibles, pero sus brillantes ideas quedan mucho más claras al no estar su obra repleta de largos cálculos. Murió en 1866 en Selasca, Italia.

Reflexiona

- *La opulencia no es la felicidad, porque las más grandes riquezas no pueden evitar, ni pueden curar las congojas del alma, ni las del corazón.*
- *Hay pensamientos que brillan como un hogar, que nos llevan al paraíso de la inteligencia y nos abren la eternidad serena.*
- *Perdonar supone siempre un poco de olvido, un poco de desprecio y mucho de comodidad.*
- *No hay hombre más desdichado que el que nunca probó la adversidad.*

¡Razona...!

¿Cuántos palitos hay que mover como mínimo para obtener una igualdad correcta?



A) 2 B) 1 C) 3
D) 4 E) 5

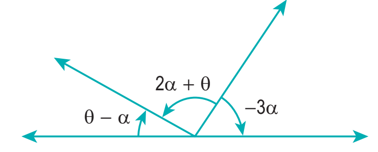


Aplicamos lo aprendido



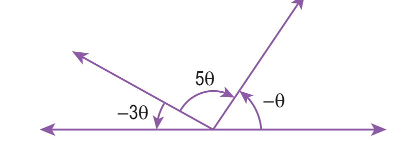
TEMA 1: ÁNGULO TRIGONOMÉTRICO SISTEMAS DE MEDIDAS ANGULARES

1 Halla α.



A) 40° B) 20° C) 30°
D) 45° E) 60°

2 Calcula el valor de θ.



A) –28° B) –22° C) –20°
D) –26° E) –25°

3 Calcula:

$$E = \frac{1°2'}{2'} + \frac{2^g 1^m}{1^m}$$

A) 263 B) 250 C) 230
D) 232 E) 220

4 Convierte $\frac{\pi}{125}$ rad al sistema sexagesimal.

A) 1°26'24" B) 2°26'25" C) 1°25'24"
D) 2°25'26" E) 1°24'26"

5 Dos ángulos miden $(3x)°$ y $\left(\frac{20x}{3}\right)^g$. Si suman $\frac{\pi}{2}$ rad, halla x.

A) 8 B) 10 C) 12
D) 15 E) 18

6 Calcula:

$$P = \sqrt{\frac{C+S}{C-S} - \sqrt[3]{8 + \frac{C+S}{C-S}}}$$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 8

7 Calcula x, si: $S = x + 4$ y $C = x + 5$, siendo S y C lo convencional para un ángulo no nulo.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

8 Si el número de grados sexagesimales y el número de grados centesimales de un mismo ángulo, son dos números consecutivos, calcula la medida de dicho ángulo en radianes.

A) $\frac{\pi}{10}$ rad B) $\frac{\pi}{20}$ rad C) $\frac{3\pi}{5}$ rad
D) $\frac{\pi}{15}$ rad E) $\frac{\pi}{18}$ rad

9 Reduce:

$$M = \frac{\pi^2(C-S)(C+S)}{380R^2}$$

Siendo S, C y R lo convencional.

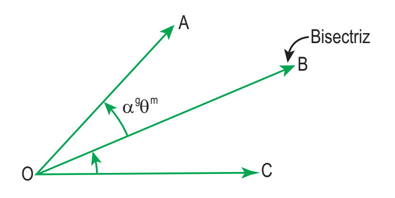
A) 10 B) 15 C) 20
D) 36 E) 48

10 Si: $\frac{R+3}{C+S} = \frac{C+S}{C^2-S^2}$

siendo S, C y R lo convencional; halla la medida del ángulo que cumple con esa relación.

A) 15π rad B) 15 rad C) 14π rad
D) 16π rad E) 16 rad

11 En la figura, el valor de $\frac{x}{3}$ en términos de θ y α será:



A) $60a + \frac{\theta}{9}$ B) $540a + \frac{27\theta}{50}$ C) $9a + \frac{10\theta}{9}$
D) $\frac{9\alpha}{10} + \frac{9\theta}{1000}$ E) $\frac{9\alpha}{10} + \frac{\theta}{100}$

12 Si las medidas de los ángulos x° z' y $\left(\frac{6^g 3^m}{9^m}\right)\left(\frac{5'6''}{17''}\right)$ son equivalentes; halla $x + z$.

A) 10 B) 64 C) 85
D) 25 E) 46

13 Los ángulos iguales de un triángulo isósceles miden: $(x - 1)°$ y $(x + 1)^g$. ¿Cuál es la medida del suplemento del tercer ángulo? Indícalo en el sistema internacional.

A) $\frac{\pi}{5}$rad B) $\frac{2\pi}{5}$rad C) $\frac{3\pi}{10}$rad
D) $\frac{\pi}{10}$rad E) $\frac{3\pi}{5}$rad

14 Si la media aritmética de los números que representan la medida de un ángulo en el sistema radial, centesimal y sexagesimal es $95 + \frac{\pi}{4}$; calcula el número de minutos sexagesimales de dicho ángulo.

A) 13 500 B) 8500 C) 9000
D) 8100 E) 10 000

Claves

1. C	3. D	5. B	7. D	9. C	11. B	13. A
2. C	4. A	6. C	8. B	10. E	12. C	14. D

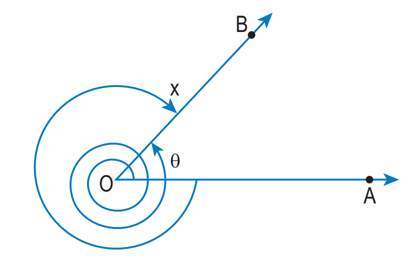


Practiquemos

NIVEL 1

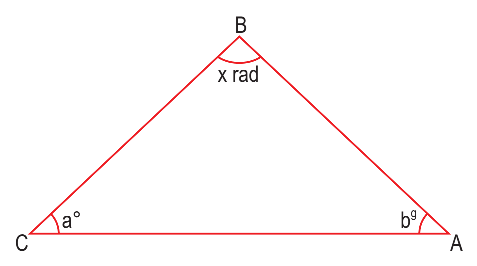
Comunicación matemática

1. En el gráfico, analiza y expresa x en términos de θ.



A) $\theta + 360°$ B) $\theta - 360°$ C) $\theta + 180°$
D) $\theta - 720°$ E) $\theta - 1080°$

2. Del triángulo, indica la expresión incorrecta.



A) Si el triángulo es equilátero, x es igual a $\frac{\pi}{3}$.

B) Si los lados CB y AB son iguales, b y a están en la razón de 10 a 9.

C) Si el triángulo es equilátero, se cumple:
$$a + x = \frac{180 + \pi}{3}$$

D) Si el lado AC es mayor al lado CB, se cumple: $\frac{x}{a} > \frac{\pi}{180}$

E) Si x + a + b es igual a 180, entonces el triángulo es equilátero.

Razonamiento y demostración

3. Convierte 18°54' al sistema centesimal.

A) 17^g B) 19^g C) 21^g
D) 23^g E) 25^g

4. Simplifica:

$$E = \frac{99° + 0{,}2\pi \text{ rad}}{180^g - 27°}$$

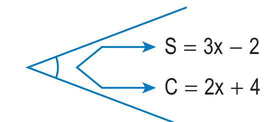
A) 1 B) 1/2 C) 2
D) 1/3 E) 3

5. Reduce:

$$E = \frac{1^g}{10^m} + \frac{1°}{3'} + \frac{1^m}{1^s}$$

A) 10 B) 40 C) 50
D) 70 E) 130

6. Halla la medida de un ángulo en radianes que cumple con:



Siendo: S y C lo convencional.

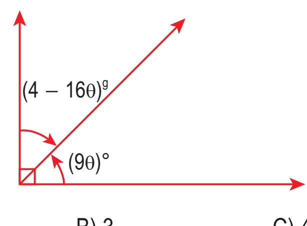
A) $\frac{\pi}{12}$ rad B) $\frac{\pi}{15}$ rad C) $\frac{\pi}{24}$ rad
D) $\frac{\pi}{3}$ rad E) $\frac{\pi}{6}$ rad

7. Señala el valor de:

$$C = \frac{2°3'}{3'} + \frac{1°2'}{2'}$$

A) 70 B) 71 C) 72 D) 73 E) 74

8. Del gráfico, halla θ.



A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

Resolución de problemas

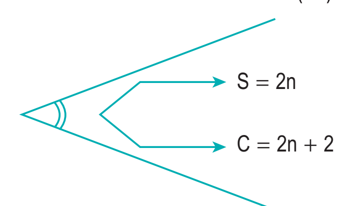
9. Las medidas de dos ángulos internos de un triángulo son 18° y 0,25π rad. Determina la medida del tercer ángulo en grados sexagesimales.

A) 112° B) 115° C) 117°
D) 119° E) 121°

10. Uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo mide 40^g. Halla la medida del otro ángulo en radianes.

A) $\frac{\pi}{5}$ rad B) $\frac{\pi}{10}$ rad C) $\frac{2\pi}{5}$ rad
D) $\frac{3\pi}{10}$ rad E) $\frac{4\pi}{7}$ rad

11. De la figura, calcula la medida en radianes de $(3n)°$, si se cumple:



Además, S y C son lo convencional.

A) $\frac{\pi}{5}$ rad B) $\frac{\pi}{10}$ rad C) $\frac{\pi}{20}$ rad
D) $\frac{3\pi}{20}$ rad E) $\frac{\pi}{120}$ rad

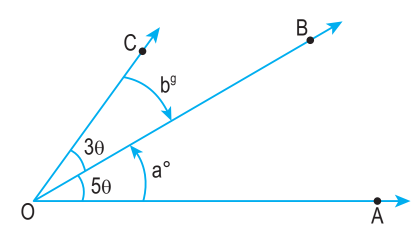
12. Se tienen dos ángulos suplementarios cuyas medidas son $\left(\frac{5x}{60}\right)\pi$ rad y $\left(\frac{100x}{3}\right)^g$. Indica la medida del mayor de ellos en grados sexagesimales.

A) 15°   B) 30°   C) 40°
D) 60°   E) 120°

NIVEL 2

Comunicación matemática

13.



Indica verdadero o falso según corresponda:

I. a > b

II. 2a + 3b = 0

III. Si θ = 15°; a – b = 25

A) VV   B) VVF   C) FVF
D) FFV   E) FVV

14. Si un ángulo se expresa en grados, minutos y segundos sexagesimales, se obtiene:

$\alpha = e° f' g''$

Indica la afirmación correcta.

A) f puede tomar cualquier valor.
B) g pertenece al intervalo [0; 100⟩.
C) El máximo valor que toma f + g es 120.
D) El número de segundos de a es 100 000e + 100f + g
E) f pertenece al intervalo [0; 59].

Razonamiento y demostración

15. La medida de un ángulo en los sistemas sexagesimal (S), centesimal (C) y radial (R) verifica la ecuación:

$2S + C - \frac{20R}{\pi} = 27$

La medida de dicho ángulo en el sistema inglés es:

A) $\frac{\pi}{20}$ rad   B) 9g   C) 9°
D) 20°   E) 10g

16. Calcula el ángulo en grados sexagesimales que cumplan con:

$\frac{3S - C}{C - S} = \frac{17\pi}{2R}$. Siendo: S, C y R lo convencional.

A) 90°   B) 120°   C) 150°
D) 160°   E) 180°

17. De la siguiente relación, halla la medida circular del ángulo.

$\frac{S}{3} + \frac{C}{2} = \frac{16R^2}{\pi}$

Siendo: S, C y R lo convencional.

A) $\frac{\pi}{10}$ rad   B) 10π rad   C) $\frac{\pi}{100}$ rad

D) 10 rad   E) 100 rad

18. Calcula la medida sexagesimal de un ángulo que cumple la siguiente relación:

$\frac{10}{9C} - \frac{9}{10S} = \frac{R}{2\pi}$.

Siendo: S, C y R lo convencional.

A) 6°   B) 8°   C) 9°
D) 10°   E) 12°

Resolución de problemas

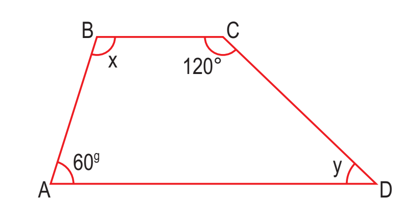
19. Calcula la medida del mayor de dos ángulos complementarios en radianes, sabiendo que sus medidas difieren en 10^g.

A) $\frac{55\pi}{13}$ rad   B) $\frac{11\pi}{40}$ rad   C) $\frac{11\pi}{20}$ rad

D) $\frac{11\pi}{10}$ rad   E) $\frac{23\pi}{24}$ rad

20. La figura ABCD es un trapecio.

Halla: (x – y) rad



A) $\frac{4\pi}{15}$ rad   B) $\frac{3\pi}{10}$ rad   C) $\frac{\pi}{5}$ rad

D) $\frac{4\pi}{25}$ rad   E) $\frac{11\pi}{30}$ rad

21. Los ángulos iguales de un triángulo isósceles miden $5x^g$ y $(4x + 7)°$, encuentra la medida del tercer ángulo en el sistema radial.

A) $\frac{\pi}{5}$ rad   B) $\frac{2\pi}{5}$ rad   C) $\frac{3\pi}{5}$ rad

D) $\frac{3\pi}{10}$ rad   E) $\frac{\pi}{10}$ rad

22. Los ángulos internos de un cuadrilátero son: $(3x)°$; x^g; $\frac{\pi x}{300}$ rad y $(2x + 35)°$. Encuentra el mayor ángulo en grados sexagesimales.

A) 100°   B) 110°   C) 120°
D) 140°   E) 150°

NIVEL 3

Comunicación matemática

23. Se tiene:

$$P = S + \cfrac{S}{S + \cfrac{S}{S + \ddots}} = C - \cfrac{C}{C - \cfrac{C}{C - \ddots}}$$

Siendo R, C y S lo convencional para un ángulo, analiza las expresiones.

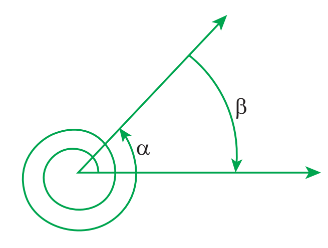
I. $S < 90$

II. $C = 20$

III. $R = \frac{361\pi}{3600}$ rad

A) FVV B) FFV C) VFF D) FVF E) VVF

24. Sea el gráfico:



α está definido por:
$\alpha = 360°n + b$, donde n es el número de vueltas. Analiza las expresiones:

I. $\frac{\alpha + \beta}{n} = 360°$

II. $b = -\beta$

III. $b < 0°$

A) VVF B) FVF C) VVV D) VFF E) FFV

Razonamiento y demostración

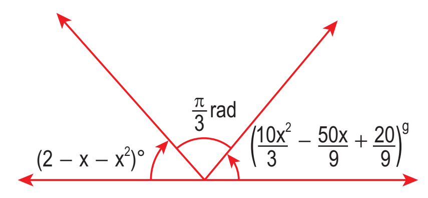
25. Si R, S y C expresan el número de radianes, grados sexagesimales y centesimales que mide un mismo ángulo.

$$\sqrt[3]{\frac{R}{\pi}} + \sqrt[3]{\frac{S}{180}} + \sqrt[3]{\frac{C}{200}} = 3$$

Entonces el valor de la expresión $\sqrt[3]{\frac{\pi}{6SCR}}$ es:

A) 6 B) $\frac{1}{6}$ C) 60 D) $\frac{1}{60}$ E) $\frac{1}{30}$

26. Halla los valores de x.



A) 5 y 6 B) –4 y 5 C) 4 y 5
D) –5 y 6 E) 6 y 7

27. Reduce:

$$E = \frac{1°}{1'} - \frac{1^g}{1^m} + \frac{1'}{1''} \cdot \frac{1^m}{1^s}$$

A) 1 B) 60 C) 100
D) 6040 E) 5960

Resolución de problemas

28. Halla la medida, en grados sexagesimales de la suma de tres ángulos, sabiendo que la suma del primero y el segundo es $\frac{\pi}{30}$ rad; la suma del segundo y el tercero es $\frac{\pi}{20}$ rad y la diferencia del doble del primero y el tercero es $\frac{\pi}{60}$ rad.

A) 10° B) 12° C) 15°
D) 20° E) 30°

29. Determina la medida circular de un ángulo, si se tiene que:
Siendo: S, C y R lo convencional
$C = 2a + b$; $S = a + b$ y $R = 7\pi - \pi a$

A) $\frac{\pi}{2}$ rad B) $\frac{\pi}{3}$ rad C) $\frac{\pi}{4}$ rad
D) $\frac{\pi}{5}$ rad E) $\frac{\pi}{6}$ rad

30. Las medidas de tres ángulos están en progresión aritmética cuya razón es 20°. Si la suma de los ángulos mayores es igual a 200°, halla la suma de los tres ángulos en el sistema centesimal.

A) 216^g B) 243^g C) 300^g
D) 320^g E) 400^g



Claves

NIVEL 1		NIVEL 2		NIVEL 3	
1. E	7. C	13. B	19. B	23. C	25. D
2. E	8. C	14. E	20. E	24. A	26. D
3. C	9. C	15. C	21. D		27. E
4. A	10. D	16. A	22. E		28. C
5. E	11. D	17. D			29. B
6. B	12. E	18. A			30. C



Aplicamos lo aprendido

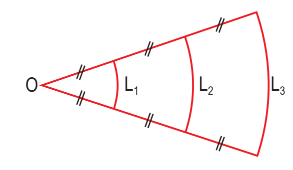
TEMA 2: SECTOR CIRCULAR

1 Halla la longitud del arco de un sector circular cuyo ángulo central mide 45°, además su radio mide 20 m.

A) 6π m B) 3π m C) 4π m
D) 5π m E) 8πm

2 Calcula:

$$E = \frac{L_1 + L_2}{L_2 + L_3}$$

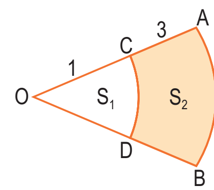


A) 2/5 B) 2/3 C) 3/5
D) 3/4 E) 1/2

3 En un sector circular, se sabe que su ángulo central mide 60^g y su longitud de arco 9π cm. Calcula el valor de su área.

A) 135π m^2 B) 140π m^2 C) 145π m^2
D) 148π m^2 E) 150π m^2

4 Del gráfico, calcula: $\frac{S_2}{S_1}$



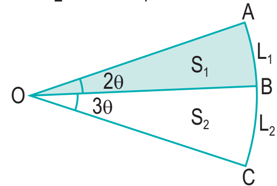
A) 6 B) 12 C) 15
D) 18 E) 21

5 En un sector circular donde su radio y arco son dos números pares consecutivos, su perímetro mide 10 cm. Calcula su área.

A) 2 cm^2 B) 5 cm^2 C) 8 cm^2
D) 6 cm^2 E) 4 cm^2

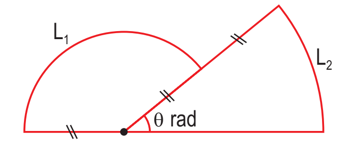
6 Del gráfico, calcula: $\frac{L_1}{S_2}$

Si: $L_2 = 6\pi$, $S_1 = 8\pi$



A) 1/2 B) 1/3 C) 1/4
D) 1/5 E) 1/6

7 Calcula θ, si: $2L_1 = 3L_2$

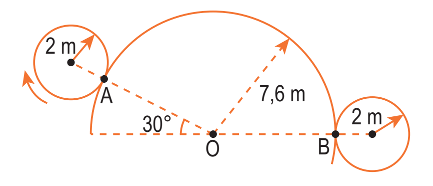


A) $\pi/2$ B) $\pi/3$ C) $\pi/4$
D) $\pi/6$ E) $\pi/5$

8 Del gráfico, calcula: $\frac{S}{\theta}$

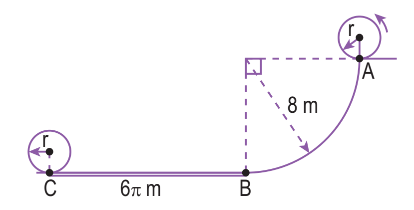
A) 15 B) 30 C) 60
D) 90 E) 180

9 Halla el número de vueltas que da la rueda al ir de A hasta B.



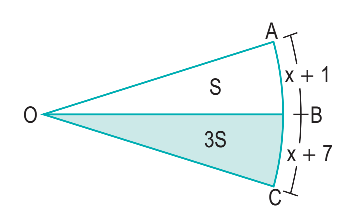
A) 3 B) 2 C) 4
D) 6 E) 8

10 Si la rueda da 5 vueltas al ir de A hacia C, halla r.



A) 1 m B) 2 m C) 3 m
D) 4 m E) 5 m

11 Calcula la longitud del arco AB del sector circular AOC.



A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

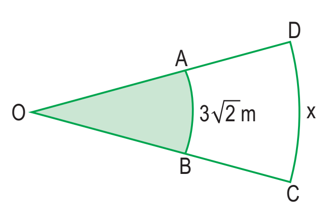
12 Se tiene un sector circular de radio 5 cm y 3 cm de longitud de arco. Si el radio disminuye 2 cm, ¿en cuánto varía el área del sector si el ángulo central no varía?

A) 4,8 cm^2 B) 4 cm^2 C) 5,6 cm^2
D) 2,7 cm^2 E) 7,5 cm^2

13 El centro de una rueda recorre 110 m cuando la rueda va desde la orilla de un río a la ciudad. ¿Cuántas vueltas da la rueda si su radio es igual a 0,5 m? (considera $\pi = 22/7$).

A) 70 B) 40 C) 25
D) 35 E) 49

14 Calcula x si el área del sector circular AOB y el área del trapecio circular ABCD son iguales.



A) 3 B) 6 C) 2
D) 3 E) 8

Claves

1. D	3. A	5. E	7. C	9. B	11. C	13. D
2. C	4. C	6. B	8. D	10. A	12. A	14. B

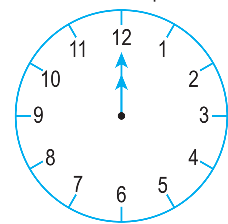


Practiquemos

NIVEL 1

Comunicación matemática

1. Un reloj analógico marca las 12 en punto:



Si el minutero mide 5 cm, indica el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

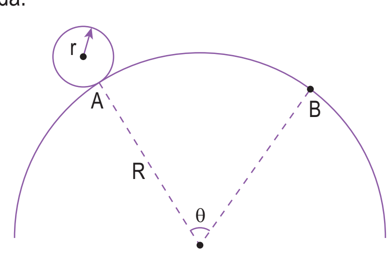
I. A las 12:26 h el minutero barre un sector circular cuyo ángulo central es igual a $\frac{5\pi}{72}$ rad.

II. A las 12:12 h el minutero barre un sector circular de área igual a 5π cm^2.

III. Cuando el reloj marca 12:17 el sector circular barrido por el minutero tiene como longitud de arco igual a $\frac{17\pi}{30}$ cm.

A) FVV B) FFV C) VFF
D) FFF E) FVF

2. Si una rueda de radio r gira sin resbalar por un camino circular de radio R desde A hasta B, indica verdadero o falso según corresponda:



I. La longitud recorrida por el centro de la rueda es igual a θR.

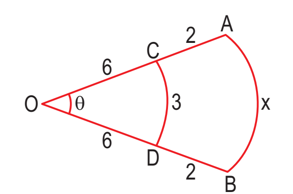
II. La longitud que recorre la rueda sobre el camino circular es igual a $\theta(r + R)$.

III. El n.° de vueltas que la rueda da al desplazarse de A hasta B es igual a $\theta\frac{(R + r)}{2\pi r}$.

A) FVF B) FFF C) FFV
D) FVV E) VVF

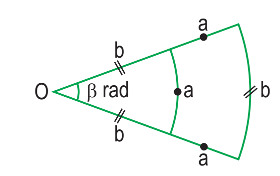
Razonamiento y demostración

3. Halla x.



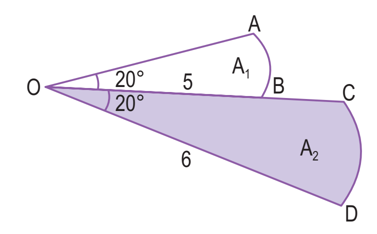
A) 2 B) 4 C) 5 D) 7 E) 8

4. Del gráfico, calcula: $\beta(1 + \beta)$.



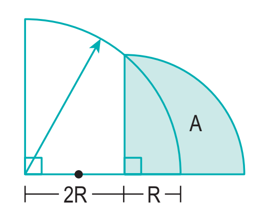
A) 0 B) 1 C) 13
D) 4 E) 2

5. Del gráfico, calcula: $J = \frac{A_1}{A_2}$



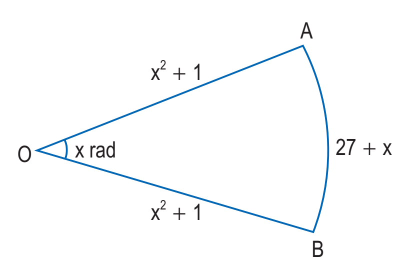
A) $\frac{125}{162}$ B) $\frac{81}{34}$ C) $\frac{25}{24}$
D) $\frac{25}{36}$ E) $\frac{125}{11}$

6. Halla el área de la región sombreada.



A) $\pi/4\ R^2$ B) $3\pi/4\ R^2$ C) $5\pi/4\ R^2$
D) $7\pi/4\ R^2$ E) $9\pi/4\ R^2$

7. En el gráfico mostrado, señala el área del sector circular AOB.



A) 500 B) 250 C) 400
D) 150 E) 175

Resolución de problemas

8. El ángulo central de un sector circular es igual a 25° y se desea disminuirlo en 9°. ¿En cuánto hay que aumentar el radio inicial para que su área no varíe, si su radio inicial es 20 m?

A) 1 m B) 5 m C) 10 m
D) 20 m E) 40 m

9. En un sector circular el área es S. Si el radio aumenta en su doble y el ángulo se reduce a su tercera parte, se genera un nuevo sector circular cuya área es:

A) 6S B) 3S C) 9S D) 4,5S E) 12S

10. Halla el número de vueltas y el ángulo girado por una rueda que recorre una distancia de 300π cm en un plano horizontal. ($r = 30$ cm).

A) 3; 15π rad B) 4; 12π rad C) 7; 8π rad
D) 2; 3π rad E) 5; 10π rad

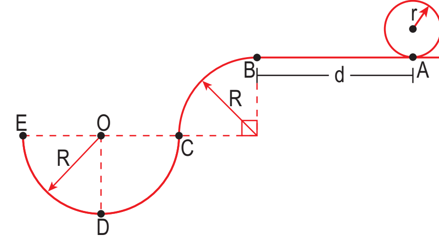
NIVEL 2

Comunicación matemática

11. El arco de un sector circular disminuye en 20% y su radio aumenta en 30%. ¿Cómo varía el área del sector circular?

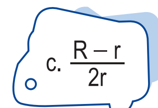
A) Aumenta en 8% B) Disminuye en 4%
C) Aumenta en 4% D) Disminuye a 86%
E) Disminuye a 95%

12. Si la rueda del gráfico gira sin resbalar:

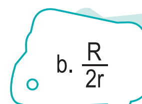


Relaciona el número de vueltas con cada tramo indicado en los enunciados.

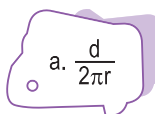
I. Desde A hasta B



II. Desde B hasta D



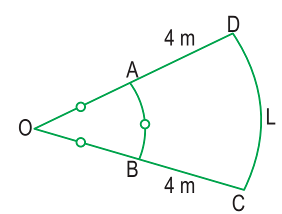
III. Desde C hasta E



A) Ib, IIc, IIIa B) Ia, IIc, IIIb C) Ic, IIa, IIIb
D) Ia, IIb, IIIc E) Ic, IIb, IIIa

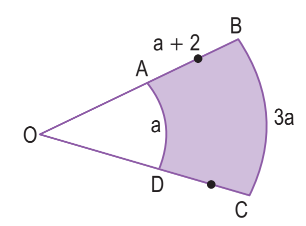
Razonamiento y demostración

13. En la figura mostrada, determina el valor de L, si el trapecio circular ABCD tiene 20 m^2 de área.



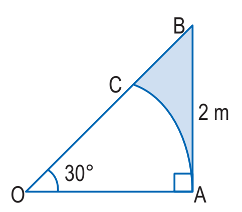
A) 1 m B) 3 m C) 5 m
D) 7 m E) 9 m

14. En la figura, el área del trapecio circular sombreado es 16 m^2. Halla el valor de 2a.



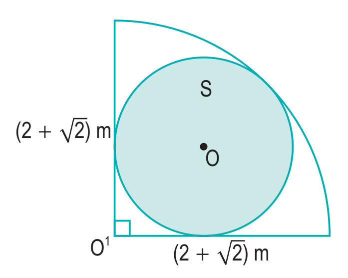
A) 1,5 m B) 2 m C) 3 m
D) 4 m E) 6 m

15. Calcula el área de la región sombreada (COA es un sector circular).



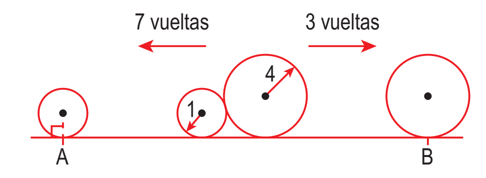
A) $(2\sqrt{2} - \pi)m^2$ B) $(2\sqrt{2} + \pi)m^2$
C) $(2\sqrt{3} + 3\pi)m^2$ D) $(2\sqrt{3} - 3\pi)m^2$
E) $(2\sqrt{3} - \pi)m^2$

16. Calcula el área de la región sombreada.



A) π m^2 B) 2π m^2 C) $\sqrt{2}\,\pi$ m^2
D) $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$ m^2 E) $(\sqrt{2} - 1)\pi$ m^2

17. De la figura, calcula la distancia AB.



A) $3 + 38\pi$ B) $4 + 30\pi$ C) $6 + 38\pi$
D) $4 + 10\pi$ E) $4 + 38\pi$

Resolución de problemas

18. Se tiene un sector circular cuyo ángulo central mide 36°. ¿Cuánto hay que aumentar al ángulo central de dicho sector para que su área no varíe si su radio disminuye en un cuarto del anterior?

A) 28° B) 36° C) 32° D) 30° E) 25°

19. En un sector circular, el arco mide 20 dm y el radio 10 dm. ¿Cuál es su área?

A) 200 dm^2 B) 100 dm^2 C) 300 dm^2
D) 400 dm^2 E) 50 dm^2

20. Dos ruedas de una bicicleta de radio R y r, recorren una distancia de 45 m. Si la suma del número de vueltas de ambas ruedas es $\frac{15}{r}$, halla la relación: $\frac{r}{R}$

A) $\frac{2\pi - 3}{3}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{2\pi}{5}$
D) $\frac{3 - \pi}{2}$ E) $\frac{5 - 2\pi}{3}$

21. En una bicicleta, los radios de las ruedas se encuentran en razón de 10 a 11. Si la rueda mayor da 20 vueltas, ¿cuántas vueltas da la rueda de menor radio?

A) 11 B) 10 C) 12 D) 22 E) 15

NIVEL 3

Comunicación matemática

22. Sean las superficies sombreadas en cada sector equivalentes ($S_1 = S_2 + S_3$).

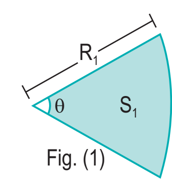


Fig. (1)

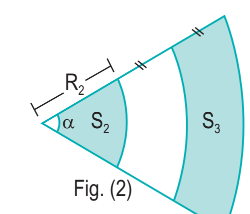


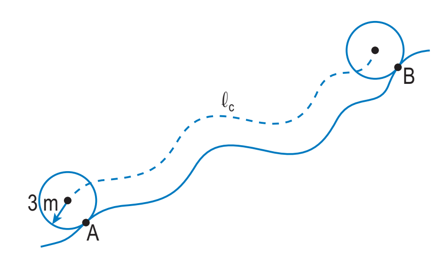
Fig. (2)

Analiza las proposiciones:

I. Si θ es igual a α entonces R_1 y R_2 son equivalentes.
II. Si R_1 y R_2 son iguales, θ es 6 veces α.
III. Si θ y α están en la razón de 24 a 49. R_1 y R_2 están en la razón de 2 a 7.

A) FVF B) VVF C) FFV D) VFV E) FFF

23. De la figura:



Asocia los valores de la izquierda y derecha para que se cumpla la igualdad:

$n_v = \frac{L_c}{2\pi r}$

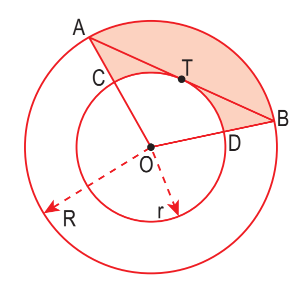
Si θ_g es el número de radianes que gira la rueda desde A hasta B.

I. $\theta_g = 39\pi$ — a. $\theta_g = 70\pi$
II. $L_c = 210\pi$ m — b. $n_v = 31$
III. $L_c = 186\pi$ m — c. $L_c = 117\pi$ m

A) Ia, IIb, IIIc B) Ic, IIb, IIIa C) Ia, IIc, IIIb
D) Ic, IIa, IIIb E) Ib, IIa, IIIc

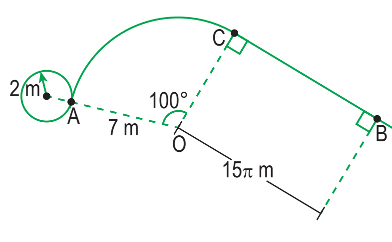
Razonamiento y demostración

24. Calcula el área de la región sombreada siendo O centro, $AC = \sqrt{14}$ m y $m\angle AOB = \frac{2\pi}{7}$ rad (T: punto de tangencia).



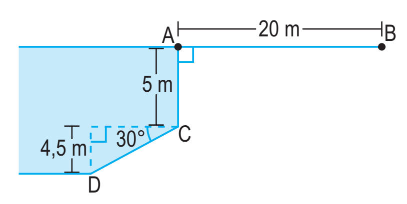
A) π m^2 B) 14π m^2 C) 7π m^2
D) 4π m^2 E) 2π m^2

25. Si la rueda recorre el circuito de A hasta B, calcula el número de vueltas que da la rueda.
(AOC: sector circular)



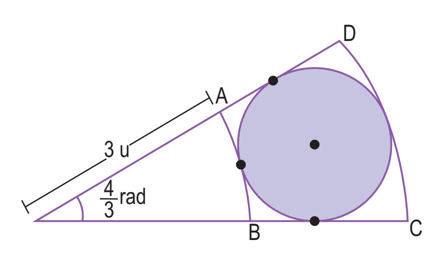
A) 8 B) 5 C) 3
D) 9 E) 6

26. Calcula la longitud que recorre la punta de la cuerda B al envolver a la región mostrada.



A) 16π m B) 10π m C) 12π m
D) 8π m E) 18π m

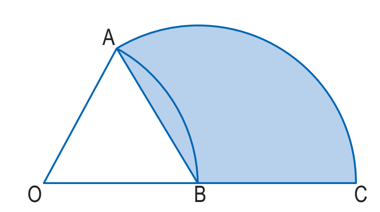
27. Calcula el área del círculo sombreado si el área del trapecio es igual a 48 u^2 (ABCD: trapecio circular).



A) 3π u^2 B) π u^2 C) 9π u^2
D) 6π u^2 E) 8π u^2

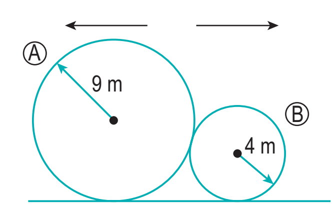
Resolución de problemas

28. De la figura mostrada, calcula el área de la región sombreada, siendo AB = OB = 6 m y AOB y ABC sectores circulares.



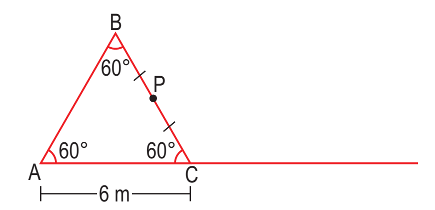
A) $(2\pi + \sqrt{3})$ m^2 B) $3(\pi + \sqrt{3})$ m^2
C) $2(2\pi + \sqrt{3})$ m^2 D) $3(2\pi + 3\sqrt{3})$ m^2
E) $3(3\pi + \sqrt{3})$ m^2

29. Si las ruedas A y B dan 14 y 7 vueltas respectivamente en las direcciones indicadas, halla la distancia entre las proyecciones de sus centros al piso en su posición final (considera $\pi = \frac{22}{7}$).



A) 100 m B) 720 m C) 900 m
D) 810 m E) 980 m

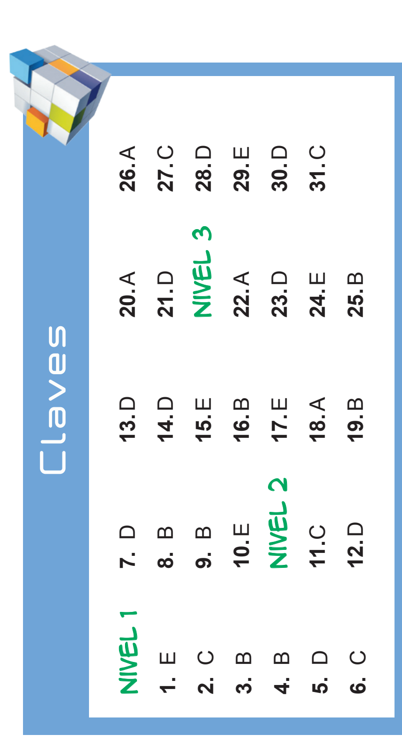
30. El triángulo gira sin resbalar de tal manera que el punto A vuelve a tocar el piso por primera vez. Halla la longitud de la trayectoria que sigue el punto P en ese instante.



A) 3π m B) 8π m C) 6π m
D) 4π m E) 12π m

31. Sean las ruedas A, B y C; el radio de B es igual a la media armónica de los radios A y C, además las longitudes que recorren las ruedas A, B y C están en la relación de 1, 3 y 2 respectivamente. ¿Cuántas vueltas da la rueda B cuando A y C dan 7 y 2 vueltas respectivamente? (Considera trayectoria rectilínea).

A) 10 B) 8,5 C) 12
D) 9 E) 7,5

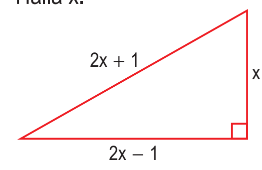


Aplicamos lo aprendido



TEMA 3: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS

1 Halla x.

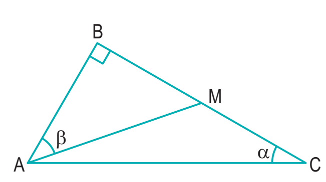


A) 4 B) 6 C) 8
D) 9 E) 5

2 Si: $\cos\alpha = \frac{2}{3}$; α es agudo, calcula $\tan\alpha$.

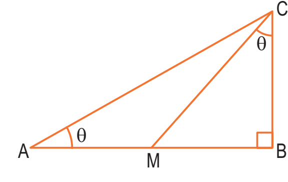
A) $\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
D) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ E) $3\sqrt{5}$

3 En la figura, AB = MC, calcula:
$R = \cot\alpha - \tan\beta$



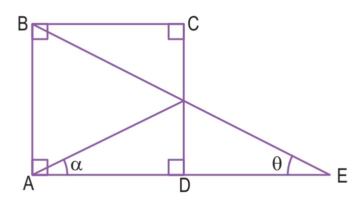
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 7

4 En la figura, AM = MB, calcula $\tan\theta$.



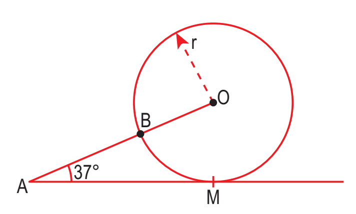
A) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{4}$
D) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{6}$

5 Si ABCD es un cuadrado, halla $\tan\alpha$, si: $\tan\theta = \frac{2}{5}$



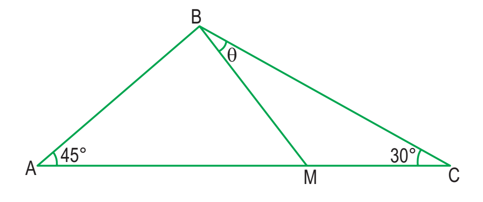
A) 0,2 B) 0,3 C) 0,4
D) 0,6 E) 0,8

6 Del gráfico, AB = 4 cm. Halla r, siendo M punto de tangencia y O centro de la circunferencia.



A) 4 cm B) 6 cm C) 3 cm
D) 2 cm E) 7 cm

7 Del gráfico, halla: $\tan(\theta + 30°)$; si BC = AM



A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

8 Del gráfico, calcula la distancia del punto P al centro de la circunferencia (T y Q puntos de tangencia).

T
O
P
16°
21 cm
Q

A) 42 cm B) 35 cm C) $3\sqrt{5}$ cm
D) $15\sqrt{2}$ cm E) 28 cm

9 Se cumple: $\cos\theta = \sqrt{3}\,\text{sen}^2 45°$. Para θ agudo, calcula 2θ.

A) 30° B) 74° C) 60°
D) 53° E) 8°

10 Si $\cos\alpha = \frac{53}{28}$; calcula $M = \frac{1}{\sqrt{\sec\alpha + 1}}$

A) 1 B) $\frac{28}{53}$ C) $\frac{53}{7}$
D) $\frac{\sqrt{7}}{53}$ E) $\frac{\sqrt{53}}{9}$

11 Si a y b son agudos y además:
$\text{sen}a\,\csc 41° = 1$; $\tan b = \cot 57°$
Calcula: $R = \cot(a - b) + 7\tan(a + b)$

A) 31 B) 1 C) 17
D) 14 E) 21

12 Calcula $\tan\alpha$.

α
2cos53°
$\sqrt{7\text{sen}16°}$

A) $\frac{\sqrt{7}}{5}$ B) $\frac{\sqrt{7}}{6}$ C) $\frac{14}{5}$
D) $\frac{7}{6}$ E) $\frac{\sqrt{7}}{3}$

13 Calcula $\cot(x + 10°)$ si a es agudo, además:
$\tan a \tan 6° = 1$
$\sec(26° - x) = \csc a$

A) $\sqrt{2}$ B) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C) $\sqrt{3}$
D) $\frac{1}{7}$ E) 7

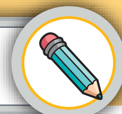
14 Si: $\text{sen}(2x - 10°)\csc(50° - x) = 1$; halla x.

A) 60° B) 20° C) 30°
D) 50° E) 40°

Claves

1. C	3. A	5. D	7. A	9. C	11. A	13. C
2. C	4. B	6. B	8. D	10. E	12. D	14. B

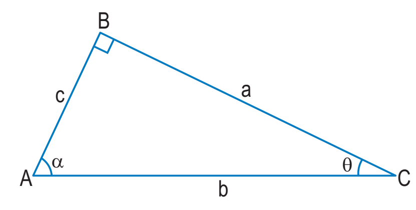
Practiquemos



NIVEL 1

Comunicación matemática

1. De la figura:



Marca la alternativa correcta:

A) $\sec\alpha = \frac{b}{a}$ B) $\tan\theta = \frac{b}{a}$ C) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{c}$
D) $\cot\theta = \frac{a}{b}$ E) Ninguna

2. Indica el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Para un mismo ángulo, el seno y el coseno son recíprocos.

II. Para cualquier triángulo la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

III. Si α y θ son complementarios, entonces senα y cosθ son equivalentes.

A) FFF B) VVF C) FVF
D) VFF E) FFV

Razonamiento y demostración

3. En un ⊿ BAC, recto en A, calcula:
$M = \operatorname{sen}B \operatorname{sen}C \tan B\, a^2$

A) 1 B) 2 C) b^2
D) b E) 2b

4. Si: $\cos x = \frac{5}{13}$, (x agudo);

halla: $M = 4(\cot x + \csc x)$

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) 2
D) 6 E) 5

5. Si: $\tan\alpha = \frac{8}{15}$, ($\alpha$ agudo);

calcula: $R = 60(\tan\alpha + \sec\alpha)$

A) 64 B) 32 C) 100
D) 184 E) 128

6. Si se cumple $\tan\theta^{\tan\theta} = \cos 45°$; calcula el mayor valor para $\cot\theta$.

A) 2 B) 3 C) $\sqrt{2}$ D) $2\sqrt{2}$ E) 4

7. Calcula el menor valor positivo de x en:
$\sec(3x + 43°) - \csc(8x - 30°) = 0$

A) 9° B) 10° C) 6°
D) 7° E) 8°

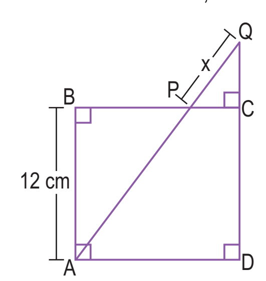
8. Si x = 30°, halla $E = \sec x \tan 2x - 2\cot\left(\frac{3x}{2}\right)$

A) 5 B) 3 C) 0 D) 9 E) 7

9. Calcula: $k = (\tan 5° - 1)(\tan 15° - 1) \ldots (\tan 75° - 1)(\tan 85° - 1)$

A) $\frac{1}{2}$ B) 0 C) $\frac{3}{5}$ D) 1 E) $\frac{3}{2}$

10. Del gráfico, calcula x si: BP = 3PC, ABCD cuadrado.



A) 4 cm B) 6 cm C) 5 cm D) 2 cm E) 8 cm

Resolución de problemas

11. En un triángulo rectángulo isósceles recto en B, se ubica P punto medio de $\overline{AC}$ y Q en $\overline{BC}$, tal que BQ es el triple de QC. Calcula m∠PQB.

A) 30° B) 45° C) $\frac{37°}{2}$ D) $\frac{127°}{2}$ E) $\frac{53°}{2}$

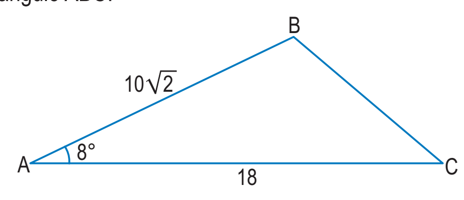
12. En un triángulo ABC la suma de los ángulos A y C es igual a 45° y la longitud de $\overline{AB}$ es igual a $5\sqrt{2}$. Calcula BC si $\tan C = \frac{5}{16}$

A) 8 B) 11 C) 5 D) 6 E) 16

NIVEL 2

Comunicación matemática

13. Del triángulo ABC:



¿Qué se puede afirmar?

I. $m\angle C = \frac{53°}{2}$

II. La longitud de BC es igual a $2\sqrt{5}$.

III. La razón de AC y la altura relativa a $\overline{AC}$ es igual a 4,5 respectivamente.

A) Solo III B) I y III C) I y II D) Solo II E) Todas

14. Marca la alternativa correcta:

A) sen15° . csc75° = 1 B) csc65° = sec65°
C) sen45° = cos45° D) tan8° . cot82° = 1
E) A y C

15. Para α y θ agudos se cumple: $\tan\alpha\tan\theta = 1$

Indica el valor de verdad de las proposiciones:

- Son ángulos iguales. ( )
- La suma de los ángulos es igual a $\frac{\pi}{2}$ rad. ( )
- $\tan\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right)$ es igual a la unidad. ( )

A) FVF B) FVV C) FFV D) VVF E) FFV

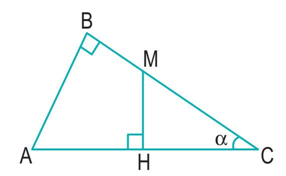
Razonamiento y demostración

16. En un ⊿ ABC, recto en A, calcula la expresión:

$$E = \sqrt{(a+b)^2 - 2bc\sqrt{\frac{1+\cos C}{1-\cos C}}}$$

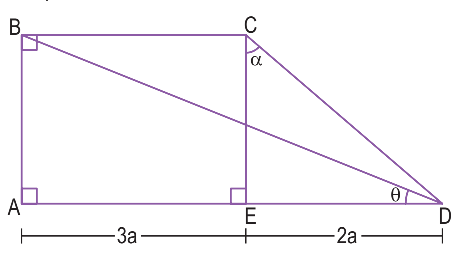
A) a B) b C) c D) 1 E) 2

17. Del gráfico, calcula $\cos\alpha$, si: BM = 1; MC = 8; además AH = HC.



A) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ B) $\frac{3}{8}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

18. Si $\tan\alpha = \frac{5}{4}$, calcula $\cot\theta$.



A) $\frac{25}{8}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{4}{5}$ D) 1 E) $\frac{4}{3}$

19. Si para α agudo se cumple:

$49\tan^2\alpha + 1 = 7\tan\alpha + 7\cot(90° - \alpha)$

calcula 2α.

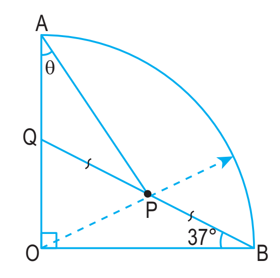
A) 8° B) 37° C) 53°
D) 16° E) 82°

20. Calcula P:

$$P = \frac{\tan 17°\left(\tan 73°\cot\frac{37°}{2} - \cot\frac{53°}{2}\cot 17°\right)}{\sec 85°\left(\tan 45°\ \text{sen}5° + \cos 85°\right)}$$

A) 0 B) 1 C) $\frac{3}{4}$
D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{2}$

21. Calcula $\tan\theta$.



A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{4}{3}$ C) 1 D) $\frac{5}{3}$ E) $\frac{4}{5}$

Resolución de problemas

22. En un triángulo rectángulo los catetos miden 3 y 5. Calcula la tangente del menor ángulo agudo.

A) $\frac{5}{3}$ B) $\frac{\sqrt{34}}{5}$ C) $\frac{\sqrt{39}}{3}$ D) $\frac{3}{5}$ E) 1

23. En un triángulo rectángulo, los lados menores miden 5 y 12 cm. Si el menor ángulo agudo del triángulo mide α, calcula: $P = \csc\alpha + \cot\alpha$

A) 2 B) 3 C) $\frac{3}{2}$ D) 5 E) $\frac{5}{3}$

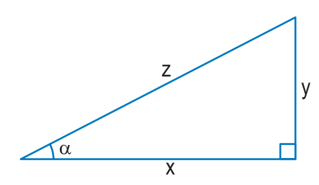
24. Si θ es un ángulo agudo, tal que: $\text{sen}\theta = \frac{2}{3}$, calcula: $K = \sqrt{5}\tan\theta + \frac{1}{\sqrt{5}}\cos\theta$

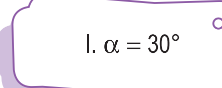
A) $\frac{5}{3}$ B) 2 C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{7}{3}$ E) $\frac{4}{3}$

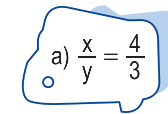
NIVEL 3

Comunicación matemática

25. Relaciona la proporción de lados para cada valor de α.







II. $\alpha = 37°$

b) $\frac{z}{x} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

III. $\alpha = \frac{53°}{2}$

c) $\frac{y}{z} = \frac{1}{2}$

A) Ia, IIb, IIIc, B) Ia, IIc, IIIb C) Ic, IIa, IIIb
D) Ib, IIa, IIIc E) Ib, IIc, IIIa

26. Marca la alternativa correcta:

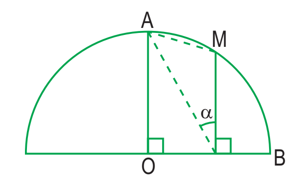
A) $\tan 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\csc 8° = \frac{5\sqrt{2}}{7}$

C) $\sec\frac{53°}{2} = \frac{4}{5}$ D) $\sec 30° = 2$

E) $\cot 16° = \frac{24}{7}$

Razonamiento y demostración

27. De la figura mostrada:

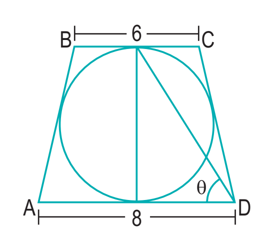


M es punto medio del arco AB. Calcula $\sec^3\alpha$.
O: centro de la semicircunferencia.

A) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ B) $\frac{5\sqrt{6}}{4}$ C) $\frac{3\sqrt{6}}{4}$

D) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ E) $\frac{\sqrt{6}}{4}$

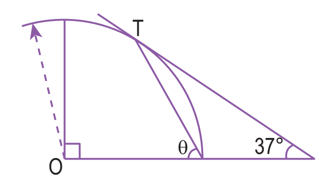
28. En el trapecio isósceles ABCD, halla $\tan\theta$.



A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{5}$ C) $\sqrt{2}$

D) $\sqrt{7}$ E) $\sqrt{10}$

29. Del gráfico, si T es punto de tangencia, halla $\cot\theta$.



A) 1 B) 2 C) $\frac{1}{2}$

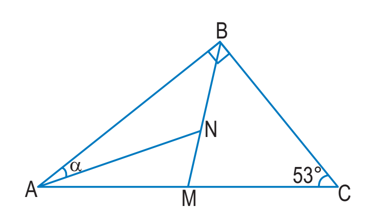
D) $\frac{1}{4}$ E) 3

30. Si: $\sec\theta = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$, halla: $\tan\theta$, (θ agudo).

A) $\frac{4ab}{a^2+b^2}$ B) $\frac{2ab}{a^2-b^2}$ C) $\frac{ab}{a^2-b^2}$

D) $\frac{1}{a^2-b^2}$ E) $\frac{1}{a^2+b^2}$

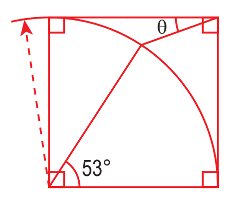
31. Del gráfico, si BN = NM y AM = MC, halla $\cot\alpha$.



A) 4 B) 1 C) 2

D) $\frac{1}{4}$ E) 5

32. Del gráfico, halla: $\tan\theta + \cot\theta$.



A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{5}{2}$

D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{3}{2}$

Resolución de problemas

33. En un triángulo rectángulo se cumple que la razón entre la suma de las longitudes de los catetos y su diferencia es igual a $\frac{31}{17}$. Calcula la cosecante del menor de sus ángulos agudos.

A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{24}{7}$

D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{25}{7}$

34. En un triángulo rectángulo ABC (B = 90°), se traza la altura $\overline{BH}$ (H en $\overline{AC}$) y la mediana AM (M en $\overline{BC}$).

Si $m\angle MAB = \alpha$ y $m\angle ABH = \beta$, halla:
$J = \tan\alpha \tan\beta$

A) 2 B) 3 C) 4

D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

Claves

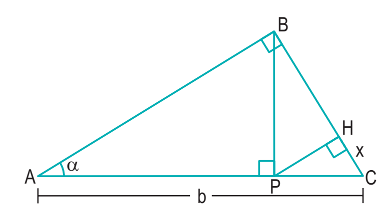
NIVEL 1	8. C	15. B	23. D	30. B
1. E	9. B	16. C	24. D	31. A
2. E	10. C	17. C	NIVEL 3	32. C
3. C	11. D	18. A	25. C	33. E
4. D	12. B	19. D	26. E	34. D
5. C	NIVEL 2	20. D	27. C	
6. E	13. C	21. E	28. A	
7. D	14. C	22. D	29. C	




Aplicamos lo aprendido

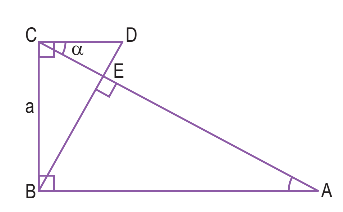
TEMA 4: RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

1 Halla x en función de α y b.



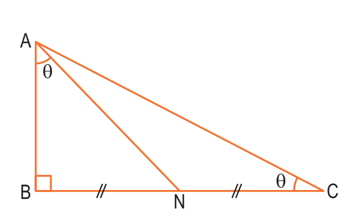
A) $b\text{sen}\alpha$ B) $b\text{sen}^2\alpha$ C) $b^2\text{sen}\alpha$
D) $b\text{sen}^3\alpha$ E) $b^3\text{sen}\alpha$

2 Calcula AE en términos de α y a.



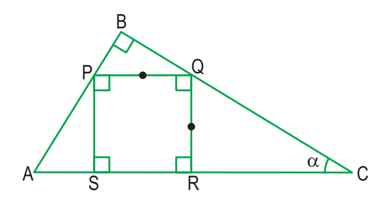
A) $a\csc\alpha\cot\alpha$ B) $a\text{sen}\alpha\cot\alpha$
C) $a\text{sen}\alpha\cos\alpha$ D) $a\sec\alpha\text{sen}\alpha$
E) $a\cos\alpha\cot\alpha$

3 Halla:
$M = \sqrt{2}\tan\theta + 1$



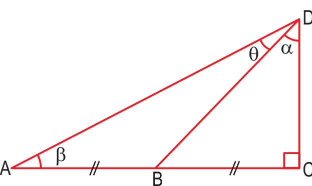
A) 3 B) 5 C) 2
D) 4 E) 7

4 Si: $AC = 5PQ$, halla: $J = \tan\alpha + \cot\alpha$



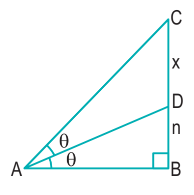
A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

5 En el gráfico mostrado, halla el valor de:
$$R = \frac{\text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta}{\text{sen}\theta}$$



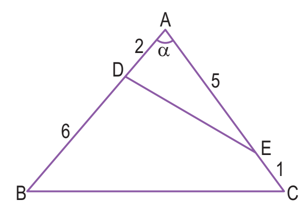
A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{2}$ C) 3
D) 2 E) 1

6 En la figura mostrada, halla x.



A) $n\csc 2\theta$ B) $n\sec 2\theta$ C) $n\cot 2\theta$
D) $n\text{sen} 2\theta$ E) $n\cos 2\theta$

7 Del gráfico, calcula el área del cuadrilátero BDEC.

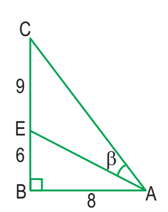


A) 16senα B) 17senα C) 18senα
D) 19senα E) 20senα

8 Si ABCD es un cuadrado, calcula:
$P = \tan\alpha + \cot\alpha$

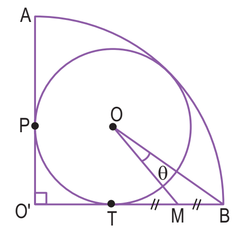
A) 11/6 B) 12/5 C) 13/6
D) 14/5 E) 10/9

9 Del gráfico, calcula:
$T = 85\text{sen}\beta + 2$



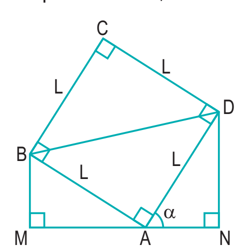
A) 36 B) 42 C) 40
D) 35 E) 38

10 Del gráfico, halla: cscθ.



A) 2 B) 3 C) $\sqrt{3}$
D) 3 E) 4

11 Si ABCD es un cuadrado de lado L, halla la mediana del trapecio MBDN, en términos de **L** y **α**.



A) $\frac{L}{2}(\cos\alpha + \text{sen}\alpha)$

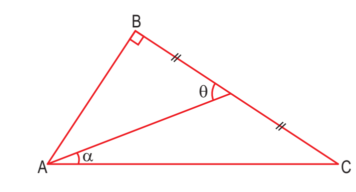
B) $\frac{L}{2}(\cos\alpha - \text{sen}\alpha)$

C) $\cos\alpha + \text{sen}\alpha$

D) $\cos\alpha - \text{sen}\alpha$

E) $\frac{L}{2}(\csc\alpha - \tan\alpha)$

12 Del gráfico, halla cotα en términos de θ.

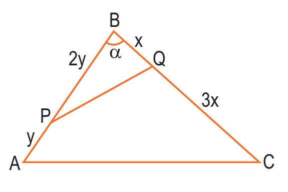


A) $\sec\theta + \cos\theta$ B) $\csc\theta + \text{sen}\theta$
C) $(\sec\theta + \cos\theta)/\text{sen}\theta$ D) $\cot\theta + \csc\theta$
E) $(\csc\theta + \text{sen}\theta)/\cos\theta$

13 Del gráfico, calcula: $P = \cot\alpha - \tan\alpha$.

A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) $2\sqrt{2}$
D) 4 E) 5

14 Se sabe que el área de la región triangular PBQ es S. Halla el área de la región triangular ABC.



A) 5S B) 2S C) 3S
D) 4S E) 6S

Claves

1. D	3. C	5. E	7. D	9. E	11. A	13. B
2. E	4. B	6. B	8. C	10. B	12. C	14. E



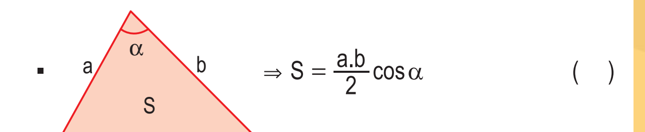
Practiquemos

NIVEL 1

Comunicación matemática

1. Indica verdadero (V) o falso (F) en las siguientes proposiciones:

- El seno de un ángulo se determina dividiendo el cateto opuesto entre el cateto adyacente de dicho ángulo. ( )

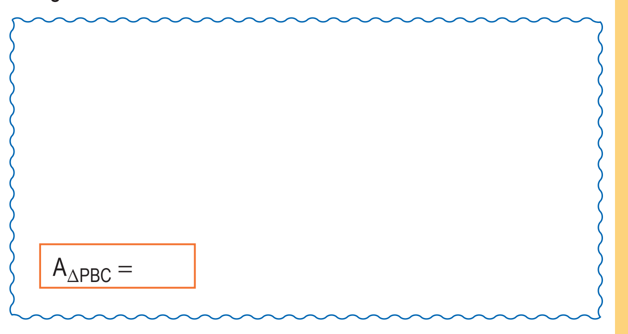
- 

$\Rightarrow S = \frac{a.b}{2}\cos\alpha$ ( )

- El teorema de Pitágoras se utiliza en un triángulo acutángulo. ( )

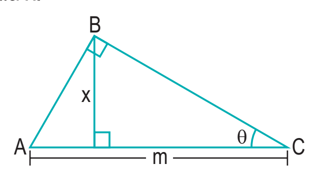
- En un triángulo rectángulo isósceles el ángulo agudo mide 45°. ( )

2. Dibuja un triángulo rectángulo ABC, recto en B. Construye exteriormente sobre el cateto AB un triángulo APB. La m∠PBA = 60°, además PB = 2 m y BC = 4 m. Halla el área del triángulo PBC.



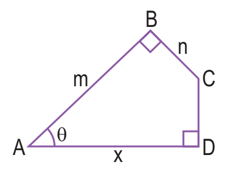
Razonamiento y demostración

3. Del gráfico, halla x.



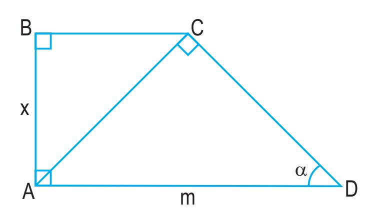
A) $m\,sen\theta$ B) $m\,sen2\theta$ C) $\frac{m}{2}$
D) $\frac{m}{2}sen2\theta$ E) $\frac{m}{4}$

4. Del gráfico, halla x.



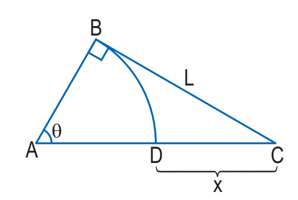
A) $m\,sen\theta + n\cos\theta$ B) $m\cos\theta + n\,sen\theta$
C) $(m + n)sen\theta\cos\theta$ D) $m\tan\theta + n\sec\theta$
E) $m\sec\theta + n\tan\theta$

5. Del gráfico, halla x.



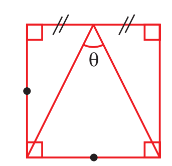
A) $m\,sen\alpha$ B) $m\tan\alpha$ C) $m\cos\alpha sen\alpha$
D) $m\cot\alpha$ E) $m\sec\alpha\csc\alpha$

6. Del gráfico halla x.



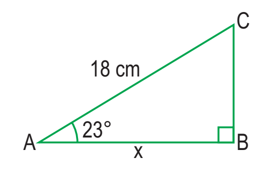
A) $L(\csc\theta - 1)$ B) $L(\csc\theta - \cot\theta)$ C) $L(1 - sen\theta)$
D) $L(\sec\theta - \tan\theta)$ E) $L(\sec\theta - 1)$

7. Del gráfico, calcula: $A = sen\theta + 2\cos\theta$



A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{2}$
D) 3 E) 2

8. Si: cos23° ≈ 0,920506, calcula x.



A) 16,5691 cm B) 17,2382 cm C) 15,1392 cm
D) 14,2632 cm E) 14,3144 cm

Resolución de problemas

9. Se tiene un triángulo rectángulo ABC, recto en B, donde m∠CAB = 42° y AB = 30 cm. Determina el valor de AC, si: cos42° = 0,743145.

A) 42,2441 cm B) 59,34257 cm C) 40,36897 cm
D) 39,27456 cm E) 46,43516 cm

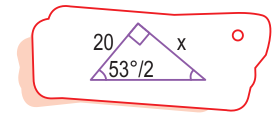
10. Se tiene un triángulo rectángulo ABC, recto en B, donde m∠CAB = 19° y CB = 12 cm. Determina el valor de AB si: tan71° ≈ 2,904208.

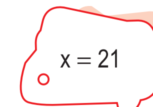
A) 24, 8050 cm B) 34, 8505 cm C) 39, 5850 cm
D) 40, 3522 cm E) 32, 3227 cm

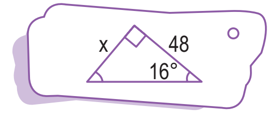
NIVEL 2

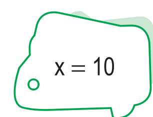
Comunicación matemática

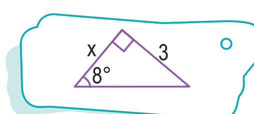
11. Relaciona según corresponda:

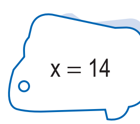




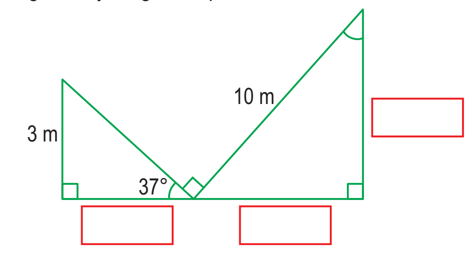






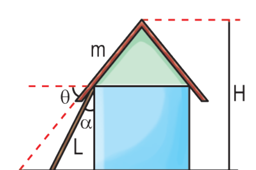


12. Observa el gráfico y luego completa:



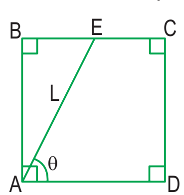
Razonamiento y demostración

13. En el gráfico, halla H en función de los datos mostrados.



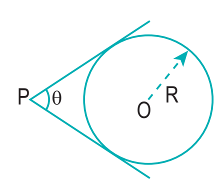
A) $m\text{sen}\alpha + L\cos\theta$
B) $m\text{sen}\theta + L\cos\alpha$
C) $m\cos\alpha + L\text{sen}\alpha$
D) $m\cos\theta + L\text{sen}\alpha$
E) $m\text{sen}\theta + L\text{sen}\alpha$

14. Si ABCD es un cuadrado, halla el perímetro del trapecio AECD en función de L y θ.



A) $L(1 + 2\text{sen}\theta - \cos\theta)$
B) $L(1 + 3\text{sen}\theta - \cos\theta)$
C) $L(1 + \text{sen}\theta - \cos\theta)$
D) $L(1 + \text{sen}\theta - 2\cos\theta)$
E) $L(1 + \text{sen}\theta - 3\cos\theta)$

15. Del gráfico, halla la distancia mínima de P a la circunferencia de centro O y radio R.



A) $R(\sec\theta - 1)$

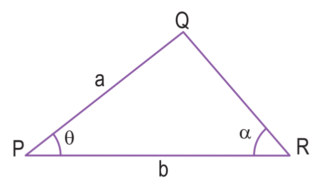
B) $R\left(\sec\frac{\theta}{2} - 1\right)$

C) $R(\csc\theta - 1)$

D) $R\left(\csc\frac{\theta}{2} - 1\right)$

E) $R\left(\cot\frac{\theta}{2} - 1\right)$

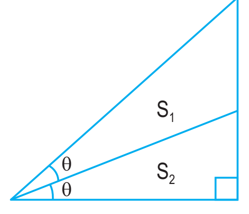
16. Del gráfico, halla $\tan\alpha$ en función de a, b y θ.



A) $\dfrac{a\text{sen}\theta}{b + a\cos\theta}$ B) $\dfrac{a\cos\theta}{b + a\text{sen}\theta}$ C) $\dfrac{a\cos\theta}{b - a\text{sen}\theta}$

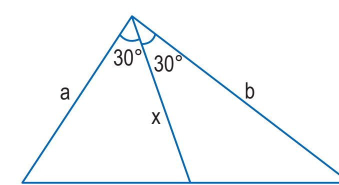
D) $\dfrac{a\text{sen}\theta}{b - a\cos\theta}$ E) $\dfrac{a\tan\theta}{b - a\cot\theta}$

17. Del gráfico, calcula: $\dfrac{S_1}{S_2}$



A) $\text{sen}2\theta$
B) $\csc2\theta$
C) $\cos2\theta$
D) $\sec2\theta$
E) $\tan2\theta$

18. Si: $a + b = ab$, calcula x.



A) $\sqrt{3}$
B) $2\sqrt{3}$
C) $3\sqrt{3}$
D) $4\sqrt{3}$
E) $5\sqrt{3}$

Resolución de problemas

19. Calcula el área de una región triangular donde 2 de sus lados miden 12 m y 14 m, además la medida del ángulo que forman dichos lados es 30°.

A) 40 m^2 B) 41 m^2 C) 42 m^2 D) 43 m^2 E) 44 m^2

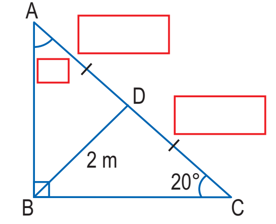
20. En un triángulo rectángulo ABC (B = 90°), se sabe que: $m\angle A = 40°$ y AC = 30 cm. ¿Cuál es el perímetro del triángulo? ($\text{sen}40° \approx 0{,}64279 \wedge \cos40° \approx 076604$).

A) 77,3543 cm B) 73,5424 cm C) 72,2649 cm
D) 76,4225 cm E) 73,3823 cm

NIVEL 3

Comunicación matemática

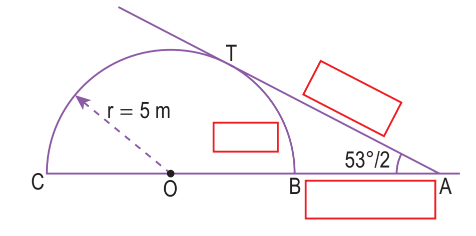
21. Sea:



Indica verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

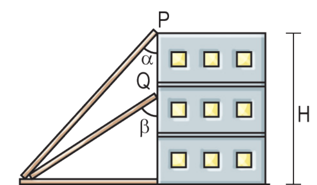
- $BC = 4\cos 20°$ ( )
- $S_{\Delta BCD} = 4\cos 20° \text{sen} 20°$ ( )
- $AB = 4\text{sen} 20°$ ( )
- $S_{\Delta ABD} = 4\text{sen} 20° \text{sen} 70°$ ( )

22. Observa el gráfico y luego completa:



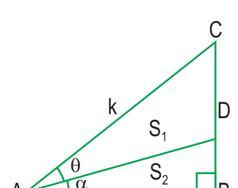
Razonamiento y demostración

23. Del gráfico, halla la distancia PQ en función de los datos mostrados.



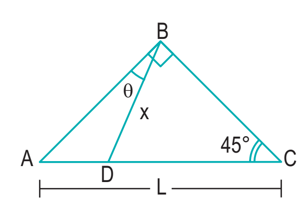
A) $H\tan\alpha\tan\beta$
B) $H(1 - \tan\alpha\tan\beta)$
C) $H(1 - \tan\alpha\cot\beta)$
D) $H\cot\alpha\cot\beta$
E) $H(1 - \cot\alpha\cot\beta)$

24. En el gráfico, se cumple: $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{k\text{sen}\theta}{\text{sen}\alpha}$. Halla k.



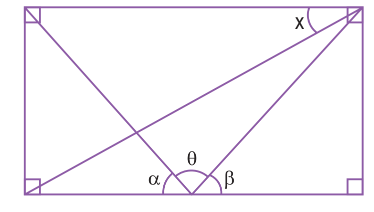
A) $\tan(\theta + \alpha)$
B) $\text{sen}(\theta + \alpha)$
C) $\sec(\theta + \alpha)$
D) $\cos(\theta + \alpha)$
E) $\cot(\theta + \alpha)$

25. Del gráfico, halla x en función de L y θ.



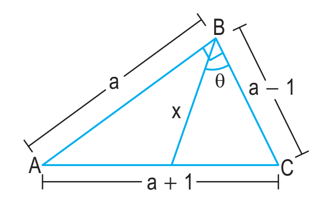
A) $\dfrac{L}{2}(\text{sen}\theta + \cos\theta)$
B) $\dfrac{L}{\sqrt{2}}(\text{sen}\theta + \cos\theta)$
C) $\dfrac{L}{2}(\text{sen}\theta + \cos\theta)^{-1}$
D) $\dfrac{L}{\sqrt{2}}(\text{sen}\theta + \cos\theta)^{-1}$
E) $L\sqrt{2}(\text{sen}\theta + \cos\theta)$

26. De la siguiente figura, calcula: $M = \csc\alpha\csc\beta\sec x$



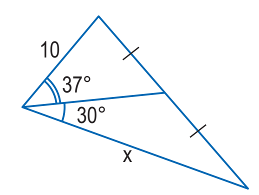
A) $\text{sen}x\text{sen}\theta$
B) $\csc x\csc\theta$
C) $\cos x\cos\theta$
D) $\sec x\sec\theta$
E) $\cot x\cot\theta$

27. Del gráfico, calcula $\left(\dfrac{x}{12}\right)^{-1}$.



A) $3\text{sen}\theta + 2\cos\theta$
B) $2\text{sen}\theta + \cos\theta$
C) $4\cos\theta + 3\text{sen}\theta$
D) $3\cos\theta + 4\text{sen}\theta$
E) $3\cos\theta + 2\text{sen}\theta$

28. Del gráfico, calcula x.



A) 19
B) 18
C) 17
D) 15
E) 12

Resolución de problemas

29. En un triángulo ABC cuya área es 0,5 m^2, determina a qué es igual el producto de las cosecantes de los ángulos del triángulo.

A) abc
B) $a^2b^2c^2$
C) ab^2c^2
D) a^2b^2c
E) a^2bc^2

30. En un triángulo rectángulo, uno de los ángulos agudos mide β y el cateto opuesto a dicho ángulo mide n. ¿Cuál es el perímetro del triángulo?

A) $n(1 + \text{sen}\beta + \cos\beta)$
B) $n(1 + \tan\beta + \cot\beta)$
C) $n(1 + \sec\beta + \csc\beta)$
D) $n(1 + \cot\beta + \csc\beta)$
E) $n(1 + \sec\beta + \tan\beta)$

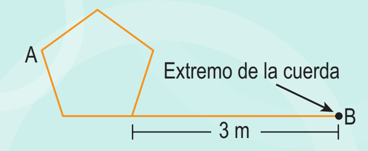
Claves



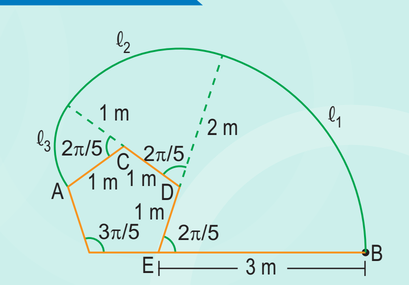
NIVEL 1	7. E	13. B	20. C	26. B
1.	8. A	14. B	NIVEL 3	27. C
2.	9. C	15. D	21.	28. E
3. D	10. B	16. D	22.	29. B
4. B	NIVEL 2	17. D	23. C	30. D
5. C	11.	18. A	24. C	
6. B	12.	19. C	25. D	

MARATÓN Matemática

De la figura mostrada, halla la longitud del arco que describe el extremo de la cuerda, cuando esta envuelve al pentágono regular de lado 1 m (tal que B coincide con A).



Resolución:



- Del gráfico:

$$\ell_T = \ell_1 + \ell_2 + \ell_3$$

$$\ell_T = \theta_1 . r_1 + \theta_2 . r_2 + \theta_3 . r_3$$

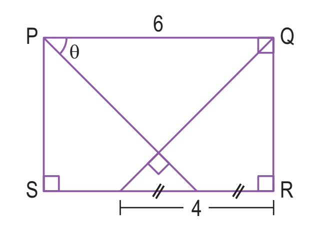
$$\ell_T = \left(\frac{2\pi}{5}\right)(3\text{ m}) + \frac{2\pi}{5}(2\text{ m}) + \frac{2\pi}{5}(1\text{ m})$$

$$\ell_T = \frac{6\pi}{5}\text{ m} + \frac{4\pi}{5}\text{ m} + \frac{2\pi}{5}\text{ m}$$

$$\ell_T = \frac{12\pi}{5}\text{ m}$$

1. Si PQRS es un rectángulo, halla el valor de:

$M = \cot^2\theta - 1$



A) 0 B) 1 C) 3
D) 2 E) –5/9

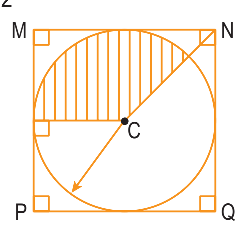
2. Calcula el valor de x, si

$S = \sqrt{2x+3}$ y $C = \sqrt{\dfrac{5x+5}{2}}$

Siendo: S y C lo convencional para un ángulo no nulo.

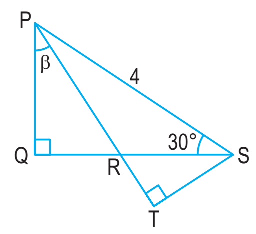
A) 60 B) 39 C) 30
D) 78 E) 45

3. Halla el valor del lado del siguiente cuadrado MNQP si el área sombreada mide $\frac{27}{2}\pi$ m^2.



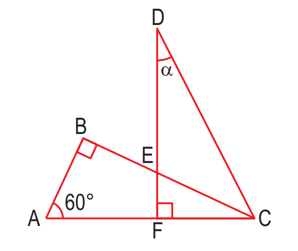
A) 6 m B) $6\sqrt{2}$ m C) 12 m
D) $3\sqrt{2}$ m E) 9 m

4. Del siguiente gráfico, calcula el valor de ST en términos de β.



A) $2\cos\beta(2 - \tan\beta)$ B) $2\cos\beta(\sqrt{3} - \tan\beta)$
C) $2\text{sen}\beta(\sqrt{3} - \tan\beta)$ D) $\text{sen}\beta(2 - \tan\beta)$
E) $\cos\beta(\sqrt{3} - \tan\beta)$

5. Del gráfico, calcula tanα si DE = 3EF.

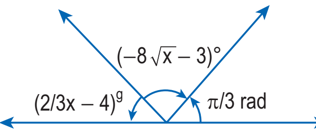


A) 1/4
B) 1/2
C) $\sqrt{3}/2$
D) $\sqrt{3}/4$
E) $\sqrt{3}$

6. Si el número de segundos sexagesimales del ángulo $(\overline{a3}_{(b)})°$ es 4320, calcula el número de minutos del ángulo $(\overline{ab})°$.

A) 1140' B) 780' C) 840'
D) 1020' E) 420'

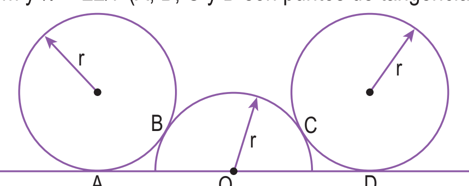
7. Se tienen los siguientes ángulos trigonométricos:



Halla el valor de x.

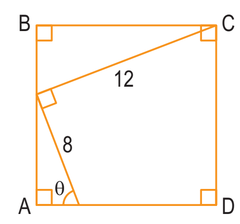
A) 54 B) 63 C) 32
D) 64 E) 81

8. Del siguiente gráfico, calcula la longitud de la curva ABCD. Si r = 14 m y π = 22/7 (A; B; C y D son puntos de tangencia).



A) 110 m B) 176 m C) 144 m
D) 108 m E) 154 m

9. Si ABCD es un cuadrado, halla el valor de cotθ.



A) 1/6
B) 1/3
C) 1/4
D) 1/2
E) 1/5


Unidad 2
Trigonometría

RECUERDA

Legendre, Adrien Marie
[1752-1833]

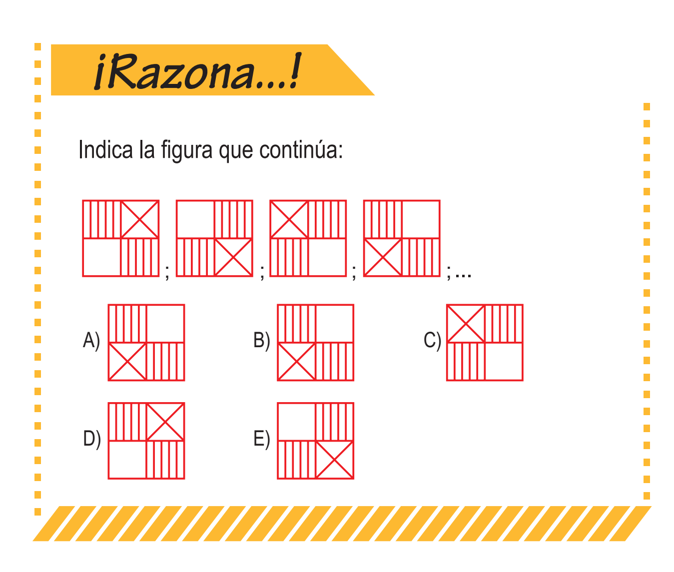
Nacido en París. Fue un matemático cuyos trabajos más importantes se relacionan en las integrales elípticas y la teoría de números, con su ley de reciprocidad cuadrática. Su obra principal *Tratado de las funciones elípticas y las integrales eulerianas.* Fue el iniciador de la teoría de las formas, de las que desarrolló las cuadráticas, binarias y ternarias.

Fourier, Jean Baptiste Joseph
[1768-1830]

Matemático y físico teórico nacido en Auxere y muerto en París; quedó huérfano a los 8 años de edad. Enseñó en la Escuela normal y en la Politécnica. Acompañó a Napoleón Bonaparte a Egipto y fue secretario del Instituto del Cairo su principal obra es *Teoría analítica del calor*; propone aquí su célebre ecuación diferencial de propagación del calor. Además contribuye con el desarrollo de una función en serie trigonométrica o serie de Fourier y propone un método matemático para la solución de numerosos problemas de vibraciones y ondulaciones.

Reflexiona

- *Si no encuentras nada digno que adorar, adora la libertad.*
- *Es preciso reflexionar maduramente antes de tomar un camino en la vida; pero una vez tomado es ser débil y cobarde lamentarlo.*
- *La libertad no consiste en hacer lo que se quiere sino en hacer lo que se debe.*
- *La sabiduría no es otra cosa que la ciencia de la felicidad.*






Aplicamos lo aprendido

TEMA 1: ÁNGULOS VERTICALES Y HORIZONTALES

1 El ángulo de elevación con el que se mira la cúspide de una torre es 60°, medido a 72 m de ella y a una altura de $\sqrt{3}$ m sobre el suelo. Halla la altura de la torre.

A) $72\sqrt{3}$ m B) $25\sqrt{2}$ m C) $73\sqrt{3}$ m
D) $8\sqrt{2}$ m E) $30\sqrt{7}$ m

2 Desde un punto P en tierra se observa la azotea de un edificio con un ángulo de elevación de 30° y acercándose 20 m en línea recta se observa el punto anterior con un ángulo de elevación de 45°. Determina la altura del edificio.

A) $10(\sqrt{3}+1)$ m B) $5(\sqrt{3}+1)$ m
C) $10(\sqrt{2}+1)$ m D) $5(\sqrt{2}+1)$ m
E) $10(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ m

3 Un niño ve el sombrero de su mamá con un ángulo de elevación 30°; además el niño mide 1,6 m. Halla la altura de la mamá si el niño está a 3 m de ella.

A) $(\sqrt{3}+2)$ m B) $(1{,}6+\sqrt{2})$ m
C) $(\sqrt{3}+1{,}6)$ m D) $2\sqrt{3}$ m
E) $(1+3\sqrt{3})$ m

4 Un perro observa una hormiga con un ángulo de depresión de 45°, la hormiga que se encuentra a 5 m del perro avanza 5 m, lejos de él. Calcula el nuevo ángulo de depresión con el cual el perro observa a la hormiga.

A) 37° B) $\frac{53°}{2}$ C) 45°
D) 53° E) $\frac{37°}{2}$

5 Un catequista, que toca la campana de una iglesia, observa la punta de un árbol con un ángulo de elevación 45° y el pie del árbol con un ángulo de depresión 60°. Si el árbol tiene una altura de 40 m, halla la distancia entre el campanario y el árbol.

A) $20(\sqrt{3}-1)$ m B) $10(\sqrt{3}-1)$ m
C) $5(\sqrt{3}-1)$ m D) $40(\sqrt{3}+1)$ m
E) $40(\sqrt{2}-1)$ m

6 Juan mide 1,75 m de estatura, él observa un árbol con un ángulo de depresión de 30° con respecto a su base y con un ángulo de elevación 60° con respecto a su parte superior. ¿Cuál es la altura del árbol?

A) 6 m B) 5 m C) 7 m
D) 8 m E) 9 m

7 Un niño de 1,5 m de estatura, está ubicado a 6 m de una torre y observa su parte más alta con un ángulo de elevación de 53°. ¿Cuál es la altura de la torre?

A) 8,5 m B) 9,5 m C) 10,5 m
D) 12,5 m E) 11,5 m

8 Desde un punto en el suelo se observa la parte alta de un edificio con un ángulo de elevación α, si nos alejamos 35 m del edificio en la misma dirección de observación, el nuevo ángulo de elevación para ver la parte más alta del edificio sería β. Si $\cot\beta - \cot\alpha = 0,7$; halla la altura del edifico.

A) 45 m B) 50 m C) 55 m
D) 60 m E) 65 m

9 Jimmy sale de su casa con dirección N30°E, luego de recorrer cierta distancia cambia S60°E hasta llegar justo al este de su casa. Si en total caminó 1 km, ¿a qué distancia se encuentra de su casa?

A) $(\sqrt{3} - 1)$ km B) $\sqrt{3}$ km C) $\sqrt{2}$ km
D) $2\sqrt{2}$ km E) $3\sqrt{3}$ km

10 Alejandro y Manuel parten de un mismo punto. Alejandro recorre 35 km con rumbo E1/4NE y Manuel recorre 12 km con rumbo S1/4SE. Calcula la distancia final entre Alejandro y Manuel.

A) 47 km B) 37 km C) 16 km
D) 38 km E) 23 km

11 Desde un helicóptero se observan dos barcos con ángulos de depresión de 30° y 37° respectivamente. Si en ese instante el helicóptero se encuentra a 120 m sobre el nivel del mar, ¿cuál es la distancia entre los barcos?

A) $40(\sqrt{3} + 4)$ m B) $20(3\sqrt{3} - 4)$ m
C) $(3\sqrt{3} + 4)$ m D) $40(3\sqrt{3} - 4)$ m
E) $(3\sqrt{3} - 4)$ m

12 Un niño observa la parte superior de un árbol con un ángulo de elevación θ, cuando la distancia que los separa se ha reducido a la tercera parte, la medida del ángulo de elevación se ha duplicado. Halla θ.

A) 60° B) 37° C) 53°
D) 45° E) 30°

13 Una persona de 1,73 m de estatura observa la parte inferior de un árbol con un ángulo de depresión de 30° y la parte superior del mismo con un ángulo de elevación de 60°. Halla la altura del árbol.

A) 6,92 B) 5,92 C) 6,82
D) 7,92 E) 6,42

14 Desde un punto se observa lo alto de una torre con un ángulo de elevación θ, desde la mitad de la distancia el ángulo de elevación es el complemento del anterior. Halla $\tan\theta$.

A) $\sqrt{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{1}{2}$
D) 2 E) $\frac{1}{4}$

Claves

1. C	3. C	5. A	7. B	9. A	11. D	13. A
2. A	4. B	6. C	8. B	10. B	12. E	14. B



Practiquemos



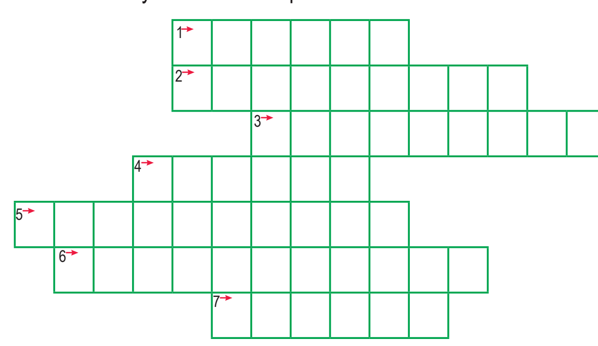
NIVEL 1

Comunicación matemática

1. Crucigrama:

Completa el siguiente crucigrama y descubre el nombre de un matemático.

1. Figura geométrica formada por dos líneas rectas que parten de un mismo punto.
2. Ángulo formado por la línea horizontal y la línea visual cuando el objetivo se encuentra por encima de la línea horizontal.
3. Ángulo formado por la línea horizontal y la línea visual cuando el objetivo se encuentra por debajo de la línea horizontal.
4. Tipo de línea que une el ojo de un observador con el objeto que se observa.
5. Tipo de línea, paralela a la superficie, que pasa por el ojo del observador.
6. Ángulo formado por dos líneas visuales.
7. Cateto adyacente entre hipotenusa.



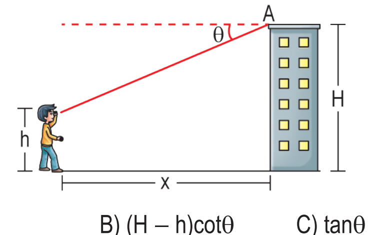
2. Dibuja la siguiente dirección: S30°E



Razonamiento y demostración

3. Halla la distancia entre el niño y el edificio.

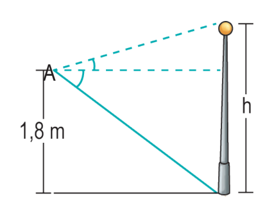
Donde:
El ángulo de depresión del punto A es θ.



A) $\cos\theta$ B) $(H - h)\cot\theta$ C) $\tan\theta$
D) $(H + h)\text{sen}\theta$ E) $(H - h)\sec\theta$

4. En la figura, halla la altura h.

Donde:
El ángulo de elevación del punto A es 16°.
El ángulo de depresión del punto A es 37°.



A) 2,5 m B) 1,5 m C) 3,5 m
D) 4 m E) 6 m

Resolución de problemas

5. ¿Cuál es la medida del menor ángulo formado por las direcciones N10°E y S40°O?

A) 120° B) 130° C)140°
D) 150° E) 160°

6. ¿Cuál es la medida del menor ángulo formado por las direcciones S50°O y N70°E?

A) 120° B) 130° C) 140°
D) 150° E) 160°

7. Una persona camina 30 m al norte y luego 40 m al este. ¿A qué distancia de su punto de partida se encuentra?

A) 20 m B) 50 m C) 70 m
D) 90 m E) 100 m

8. Desde un faro se divisan dos barcos al sur y al oeste a 100 m y $100\sqrt{3}$ m, respectivamente. ¿Cuál es la distancia entre los barcos?

A) 100 m B) 200 m C) 300 m
D) 400 m E) 150 m

9. Desde un barco anclado, se divisan dos boyas al N70°E y N20°O a 50 m y 120 m, respectivamente. ¿Cuál es la distancia entre las boyas?

A) 130 m B) 150 m C) 170 m
D) 200 m E) 240 m

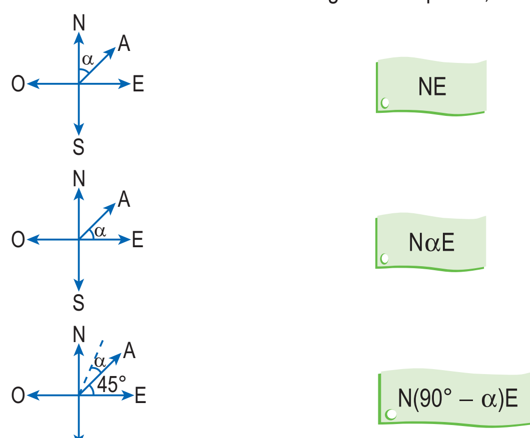
10. Claudia Lucía sale de su casa y recorre 40 m al norte, luego 80 m al oeste, en donde divisa su casa en la dirección SαE. Conocedora del curso de trigonometría, calculó la $\tan\alpha$ y obtuvo:

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) 2
D) 4 E) 8

NIVEL 2

Comunicación matemática

11. Relaciona las direcciones de $\vec{A}$ según corresponda, :



12. Completa los espacios en blanco del siguiente enunciado:

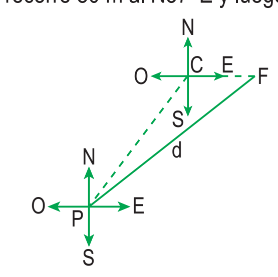
La ________ es la ________ paralela a la ________ referencial que pasa por el ojo del ________.

Con las siguientes palabras:

A) Observador B) Superficie horizontal
C) Línea horizontal D) Línea recta

Razonamiento y demostración

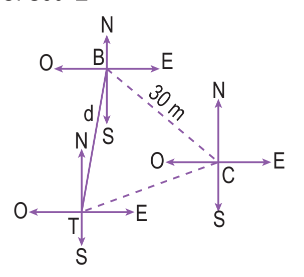
13. Halla d, si Paco recorre 80 m al N37°E y luego 16 m al E.



A) 26 m B) $30\sqrt{3}$ m C) 38 m
D) $64\sqrt{2}$ m E) $32\sqrt{2}$ m

14. Halla d.

Si: T observa a B: N10°E
T observa a C: N70°E
B observa a C: S50°E



A) 27 B) 45 C) 32 D) 37 E) 30

Resolución de problemas

15. Un auto parte en la dirección NE y recorre $40\sqrt{2}$ km, luego se dirige hacia el este, recorriendo una distancia d y finalmente se dirige hacia el S37°E, llegando a un punto ubicado al este del punto de partida; calcula el valor de d, si el auto se encuentra a 90 km del punto inicial.

A) 10 km B) 20 km C) 30 km D) 40 km E) 50 km

16. Calcula el mayor ángulo formado por las direcciones: $SE\frac{1}{4}S$ y $N\frac{1}{4}NE$

A) 250° B) 210° C) 225° D) 270° E) 185°

17. Dos autos A y B parten simultáneamente de una estación de gasolina, con velocidades constantes y en las direcciones S15°E y S75°E respectivamente; al cabo de cierto tiempo el auto B es observado desde A en la dirección N75°E y a 30 km de distancia. Calcula la diferencia de las distancias recorridas por los autos hasta el momento de la observación.

A) $5\sqrt{3}$ km B) $10\sqrt{3}$ km C) $15\sqrt{3}$ km
D) $20\sqrt{3}$ km E) $30\sqrt{3}$ km

18. Un móvil se desplaza 40 km según la dirección S60°O con respecto a un punto inicial. Luego se desplaza 20 km según la dirección N60°O. Halla el desplazamiento total entre el punto inicial con respecto a su nueva ubicación.

A) $10\sqrt{3}$ km B) $15\sqrt{7}$ km C) $20\sqrt{7}$ km
D) $20\sqrt{14}$ km E) $25\sqrt{7}$ km

19. Un hombre que está al sur de un faro observa que su sombra proyectada por la luz del faro tiene 4 m de longitud, caminando 60 m hacia el oeste, observa que su sombra es de 5 m de longitud. Si la persona mide 1 m, halla la altura del faro.

A) 18 m B) 19 m C) 20 m D) 21 m E) 22 m

20. Un bote sobre un puerto parte en la dirección N(90° – α)E avanzando 120 m. Si otro al este del puerto lo alcanza recorriendo $20\sqrt{2}$ m en la dirección N(45° + α)O, halla: cot(45° + α).

A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{4}$

NIVEL 3

Comunicación matemática

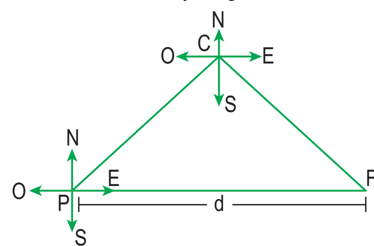
21. Indica verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

I. NE < > N45°E ( )
II. NNO < > N22°30'O ( )
III. $N\frac{1}{4}NO$ < > N11°15'O ( )

22. Dibuja el enunciado
Desde un faro se observan dos barcos A y B en las direcciones SO y S15°E; respectivamente, al mismo tiempo B se observa desde A en la dirección S68°E.

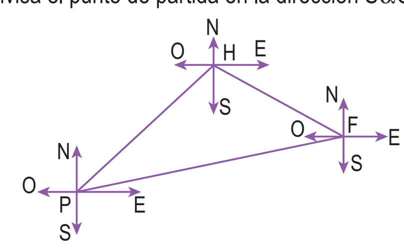
Razonamiento y demostración

23. Halla d, si P recorre: L al NαE y luego, L al SαE.



A) 7Lsenα B) 5Lsenα C) 4Lsenα
D) 3/2Lsena E) 2Lsenα

24. Halla tanα si P recorre d al NθE y luego, d al S(90° − θ)E, de donde divisa el punto de partida en la dirección SαO.



A) $\left(\dfrac{\text{sen}\theta - \cos\theta}{\text{sen}\theta + \cos\theta}\right)$ B) senθ − cosθ C) senθ + cosθ
D) senθ . cosθ E) $\left(\dfrac{\text{sen}\theta + \cos\theta}{\cos\theta - \text{sen}\theta}\right)$

Resolución de problemas

25. Una persona que se dirige hacia el oeste observa dos objetos en la dirección NθO, camina una cierta distancia y observa que uno de los objetos se encuentra al norte y el otro al NE. Avanza una distancia x y observa que el objeto más alejado de su primera posición se encuentra en la dirección N(90° − θ)E. Halla x, si los objetos se encuentran separados una distancia d.

A) dcotθ(secθ + cscθ) B) dtanθ(secθ + cscθ)
C) dcotθ(senθ + cosθ) D) d(senθ + cosθ)
E) d(secθ + cscθ)

26. Un barco sale en dirección NE a una velocidad de 10 m/s. Luego de transcurrir $\sqrt{2}$ segundos se dirige hacia el norte con la misma rapidez durante 3 segundos. ¿En qué dirección está el barco al final del recorrido, respecto al punto de partida?

A) N37°E B) N58°E C) N$\dfrac{37°}{2}$E
D) N$\dfrac{53°}{2}$ E) Narctan $\dfrac{1}{4}$ E

27. Desde un faro se observan barcos A y B en la dirección N35°O y S55°O respectivamente; en ese mismo instante, B es observado desde A en la dirección S25°O. Si la velocidad de A es de 24 km/h, la velocidad de B es de 24$\sqrt{3}$ km/h y la distancia inicial de A al faro es de 5 km. Halla la distancia entre A y B al cabo de una hora y 15 minutos.

A) 60 km B) 60$\sqrt{3}$ km C) 70 km
D) 80 km E) 90$\sqrt{3}$ km

28. Desde los extremos de un diámetro AB de una pista semicircular, parten dos atletas que van hacia el encuentro, el cual se realiza en un punto P (en el semicírculo) que está al NθE de A y al NαO de un punto C que se localiza en la prolongación de $\overline{AB}$ y al este de A. Si B equidista de A y C, halla tanα.

A) tanθ + cotθ B) tanθ + 3cotθ C) 2tanθ + cotθ
D) tanθ + 2cotθ E) 3tanθ + cotθ

29. Un avión desciende con una inclinación θ en la dirección este-oeste. ¿Cuál es el valor de la secθ, para que un observador vea al avión primero hacia NE y hacia el norte con ángulos iguales al complemento de θ?

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt[3]{2}$ C) $\sqrt[4]{2}$
D) $\sqrt[4]{3}$ E) $\sqrt[4]{8}$

30. Dos estaciones de radar A y B tienen que calcular la altura de un avión por ubicación simultánea. De A se ve en la dirección N1/4NE con un ángulo de elevación θ, de B se ve en la dirección O1/4NO con un ángulo de elevación α. Si la distancia entre A y B es d, ¿a qué altura se encuentra el avión?

A) $\dfrac{d}{\text{ctg}\alpha + \text{ctg}\theta}$ B) $\dfrac{d}{\tan\alpha + \tan\theta}$

C) $\dfrac{d}{\sqrt{\cot^2\theta + \cot^2\alpha}}$ D) $\dfrac{d}{\sqrt{\tan^2\theta + \tan^2\alpha}}$

E) $\dfrac{\sqrt{\tan^2\theta + \tan^2\alpha}}{d}$

Claves

NIVEL 1	7. B	13. D	20. B	26. E
1.	8. B	14.	NIVEL 3	27. C
2.	9. A	15. B	21.	28. D
3. B	10. C	16. C	22.	29. C
4. A	NIVEL 2	17. B	23. E	30. C
5. D	11.	18. C	24. E	
6. E	12.	19. D	25. C	

Aplicamos lo aprendido



TEMA 2: LA RECTA EN EL PLANO CARTESIANO

1 Halla la pendiente de la recta que pasa por los puntos (–3; 2) y (4; –1).

A) 3/4 B) –3/7 C) 7/3
D) 4/3 E) –3/4

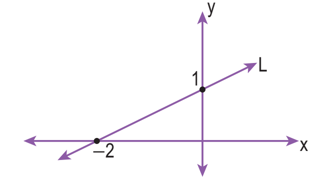
2 Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos P(–4; 2) y Q(2; 6).

A) $x + 3y + 10 = 0$ B) $2x - 3y + 8 = 0$
C) $x + 4y - 2 = 0$ D) $2x - 3y + 14 = 0$
E) $3y - 2x + 8 = 0$

3 Halla la distancia del punto (3; 0) a la recta L: $3x + 2y + 4 = 0$.

A) $\sqrt{13}$ B) $-2\sqrt{11}$ C) $\sqrt{11}$
D) $-\sqrt{13}$ E) 7

4 Halla la ecuación de la recta L.



A) $x - 3y + 3 = 0$ B) $x - 2y + 2 = 0$
C) $x + 3y - 3 = 0$ D) $x + 2y - 2 = 0$
E) $x - 2y - 2 = 0$

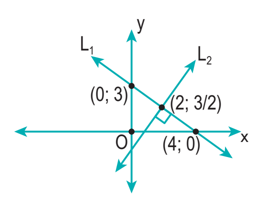
5 Si la recta L: $3x + y - 8 = 0$ es perpendicular a la recta L_1 que pasa por el punto M(1; –3), halla la ecuación de la recta L_1.

A) $2x + 3y + 8 = 0$ B) $x + 2y - 6 = 0$
C) $x + 3y + 10 = 0$ D) $2x - 3y + 10 = 0$
E) $x - 3y - 10 = 0$

6 Halla la ecuación de la recta cuyo ángulo de inclinación mide 45° y que interseca al eje de ordenadas en el punto (0; 4).

A) $x + y + 1 = 0$ B) $x + y - 1 = 0$
C) $x - 4y + 1 = 0$ D) $x - y - 4 = 0$
E) $x - y + 4 = 0$

7 En el gráfico, halla la ecuación de la recta $\overleftrightarrow{L}_2$.



A) $6x + 8y + 1 = 0$
B) $8x - 6y - 7 = 0$
C) $8x + 6y - 7 = 0$
D) $6x - 4y - 7 = 0$
E) $-8x + 6y + 1 = 0$

8 Halla la ecuación de la recta $\left(m = \frac{2}{3}\right)$ que pasa por el baricentro del triángulo de vértices (–3; 3), (–3; –4) y (3; –2).

A) $2x - 3y - 1 = 0$
B) $2x + 3y - 1 = 0$
C) $2x + 3y + 1 = 0$
D) $2x - 3y + 1 = 0$
E) $3x - 2y + 1 = 0$

9 Si P(a; b) es el punto de intersección de las rectas:

$\overleftrightarrow{L}_1$: $4x - 3y + 1 = 0$

$\overleftrightarrow{L}_2$: $5x - 2y - 4 = 0$

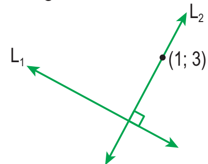
Halla: $(3a - b)^2$

A) 16
B) 4
C) 9
D) 25
E) 36

10 Si ABCD es un cuadrado cuyo lado mide 13, determina la ecuación de la recta $\overleftrightarrow{L}$.

A) $7x + 17y - 85 = 0$
B) $7x - 16y + 84 = 0$
C) $7x - 17y - 85 = 0$
D) $7x + 16y - 84 = 0$
E) $7x - 17y + 85 = 0$

11 Del gráfico, halla la ecuación de la recta $\overleftrightarrow{L}_2$, si $\overleftrightarrow{L}_1$: $3x - 4y - 11 = 0$.



A) $2x + 2y - 8 = 0$
B) $4x + 3y - 13 = 0$
C) $2x + 3y - 7 = 0$
D) $3x + 4y - 15 = 0$
E) $3x + 2y - 9 = 0$

12 Halla la ecuación de la recta L_1 que pasa por el punto M(4; –3) y es paralela a la recta $\overleftrightarrow{L}_2$: $3x - y + 5 = 0$.

A) $3x - y - 12 = 0$
B) $2x + 3y - 14 = 0$
C) $2x + y - 10 = 0$
D) $3x - 2y - 18 = 0$
E) $3x - y - 15 = 0$

13 La recta $\overleftrightarrow{L}_1$ que pasa por los puntos A(–3; 2) y B(1; –1) forma un ángulo θ con la recta $\overleftrightarrow{L}_2$ de pendiente 1/2. Calcula el valor de $\tan\theta$.

A) 3/5
B) –1/5
C) –2
D) 2/5
E) 0

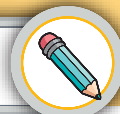
14 La recta $\overleftrightarrow{L}_1$: $ax + 2y - 6 + b = 0$ pasa por el punto N(2; –3) y es paralela a la recta $\overleftrightarrow{L}_2$: $(b - 2)x - 3y + a = 0$. Halla $(a + b)$.

A) –4
B) –6
C) –8
D) –10
E) –12

Claves

1. B	3. A	5. E	7. B	9. C	11. B	13. C
2. D	4. B	6. E	8. A	10. E	12. E	14. C

Practiquemos



NIVEL 1

Comunicación matemática

1. Completa en los recuadros según corresponda:

I. Pendiente de la recta que une a los puntos $M(x_1; y_1)$ y $N(x_2; y_2)$:

[ ]

II. Pendiente de la recta $Ax + By + C = 0$:

[ ]

III. Pendiente de una recta que posee un ángulo de inclinación θ.

[ ]

2. Sean las rectas L_1 y L_2 de pendientes m_1 y m_2 respectivamente. Coloca verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

I. Si: $\overleftrightarrow{L_1} \perp \overleftrightarrow{L_2} \Rightarrow m_1 + m_2 = -1$ ( )

II. Si: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2} \Rightarrow m_1 = m_2$ ( )

III. Si: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{x}_{(eje)} \Rightarrow m_1 = 0$ ( )

IV. Si: $\overleftrightarrow{L_2} \perp \overleftrightarrow{y}_{(eje)} \Rightarrow m_2 = 1$ ( )

Razonamiento y demostración

3. Si una recta tiene un ángulo de inclinación de 37°; calcula su pendiente.

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{2}{3}$
D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{4}{5}$

4. ¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por los puntos A(–2; –3) y B(1; 1)?

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{4}{3}$
D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{2}{5}$

5. Si el ángulo de inclinación de una recta es 150°; calcula su pendiente.

A) 1 B) –1 C) $-\sqrt{3}$
D) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $-\frac{1}{2}$

6. ¿Cuál es la ecuación de la recta cuyo ángulo de inclinación es 37° y pasa por (1; 2)?

A) $3x - 4y + 5 = 0$ B) $3x + 4y - 11 = 0$
C) $4x - 3y - 2 = 0$ D) $4x + 3y - 10 = 0$
E) $3x - 2y + 1 = 0$

7. ¿Cuál es la pendiente de $\overleftrightarrow{L}: 3x + y + 1 = 0$?

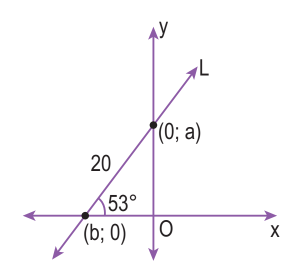
A) 2 B) –2 C) $\frac{1}{2}$
D) $-\frac{1}{2}$ E) –3

8. ¿Cuál es la pendiente de una recta si su ángulo de inclinación es de 143°?

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $-\frac{3}{4}$
D) $-\frac{4}{3}$ E) $-\frac{1}{2}$

Resolución de problemas

9. En el gráfico, halla la suma de interceptos de la recta L.



A) 2 B) 4 C) 3
D) 5 E) 1

10. Un punto dista 5 μ del origen del plano cartesiano y la pendiente que lo une al punto A(3; 4) es 1/2. Determina las coordenadas del punto.

A) (3; 4) B) (2; 3) C) (4; 3)
D) (3; 2) E) (1; 3)

NIVEL 2

Comunicación matemática

11. Representa en el plano cartesiano, lo siguiente:

a) Una recta de ángulo de elevación 45°, tal que interseca al eje x en el punto (2; 0).

b) La recta cuya ecuación es: $4x - 5y - 10 = 0$.

12. Compara las siguientes cantidades:

A: La tangente del ángulo formado por la intersección de:

$\overleftrightarrow{L_1}$: $4x + y - 2 = 0$

$\overleftrightarrow{L_2}$: $-3x + 2y + 4 = 0$

B: La tangente del ángulo formado por la intersección de:

$\overleftrightarrow{L}_1$: $x + 4y - 3 = 0$

$\overleftrightarrow{L}_2$: $2x - 3y + 1 = 0$

A) 3A = B B) –A = 6B C) –2A = 3B
D) A = –B E) 3A = –B

Razonamiento y demostración

13. ¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por los puntos P(–1; 2) y R(3; 1)?

A) $\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$
D) $-\frac{1}{4}$ E) $-\frac{2}{3}$

14. ¿Cuál es la ecuación de la recta cuyo ángulo de inclinación es 135° y pasa por (1; 3)?

A) $x + y - 4 = 0$ B) $x - y + 2 = 0$
C) $2x + y - 5 = 0$ D) $2x - y + 1 = 0$
E) $x + y + 10 = 0$

15. Si la recta L tiene por ecuación: $3x - 2y + 1 = 0$
¿Cuál es su pendiente?

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $-\frac{3}{2}$
D) $\frac{3}{2}$ E) $-\frac{2}{3}$

16. Dada la recta L: $3x - 2y + 1 = 0$, ¿cuál es la pendiente de la recta L_1?, ($\overleftrightarrow{L}_1 \perp \overleftrightarrow{L}$).

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $-\frac{2}{3}$
D) $-\frac{3}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

17. Dado el triángulo de vértices: A(1; 1), B(–3; 2) y C(–7; –1). ¿Cuál es la pendiente de la recta paralela a $\overline{AB}$?

A) $\frac{1}{4}$ B) $-\frac{1}{4}$ C) $-\frac{1}{2}$
D) $\frac{1}{2}$ E) 4

18. Halla el punto de intersección de:

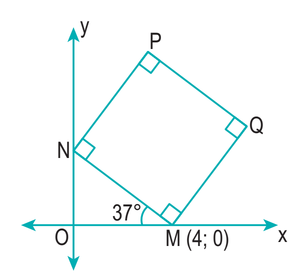
$\overleftrightarrow{L}_1$: $6x - 5y + 27 = 0$

$\overleftrightarrow{L}_2$: $8x + 7y - 5 = 0$

A) (–2; 3) B) (3; 2) C) (–3; 2)
D) (2; –3) E) (–2; –3)

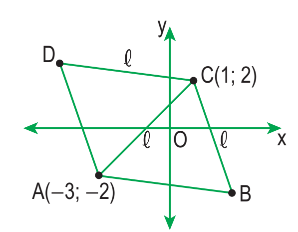
Resolución de problemas

19. De acuerdo al gráfico, calcula: $k = OP^2 - OQ^2$



A) 5 B) –6 C) –7 D) –5 E) 7

20. Del gráfico, calcula los vértices B y D respectivamente, si ABCD es un rombo. Además AC = AD.



A) $(\sqrt{3} - 1; -\sqrt{3}) \wedge (1 - \sqrt{3}; \sqrt{3})$
B) $(2\sqrt{3} - 1; -2\sqrt{3}) \wedge (-1 - 2\sqrt{3}; 2\sqrt{3})$
C) $(-\sqrt{3}; -\sqrt{3} - 1) \wedge (\sqrt{3}; 1 - \sqrt{3})$
D) $(-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3} - 1) \wedge (2\sqrt{3} - 2; 1 - 2\sqrt{3})$
E) $(\sqrt{3} + 1; \sqrt{3}) \wedge (1 - 2\sqrt{3}; 2\sqrt{3})$

NIVEL 3

Comunicación matemática

21. De las siguientes proposiciones:

I. La recta $\overleftrightarrow{L}_1$: $3x - y + 2 = 0$, tiene mayor pendiente que la recta $\overleftrightarrow{L}_2$: $4x - 2y + 3 = 0$.
II. La distancia de la recta $\overleftrightarrow{L}_1$: $y - 2 = 0$ al eje x es 2.
III. Si el ángulo de inclinación de una recta es obtuso, entonces su pendiente es positiva.

Son falsas:

A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) I y III E) I; II y III

22. Ordena de forma ascendente la distancia entre:

a. (–2 ; 1) ∧ (2; –2)
b. (–3 ; 1) ∧ (0 ; 4)
c. (1 ; 3) ∧ (2; 2)
d. (2; 5) ∧ (2; 1)

A) dbca B) cbda C) cadb
D) cdba E) dcab

Razonamiento y demostración

23. ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por A(1; 2) y B(3; 1)?

A) $x + 2y - 5 = 0$ B) $x - 2y + 3 = 0$
C) $2x + y - 4 = 0$ D) $2x - y = 0$
E) $3x + 2y = 0$

24. Halla la ecuación de la recta que pasando por P(–2; 3) sea paralela a $\overleftrightarrow{L}_1$: $3x + y - 1 = 0$.

A) $3x - y + 9 = 0$ B) $x + 3y - 7 = 0$
C) $x - 3y + 11 = 0$ D) $3x + y + 3 = 0$
E) $3x + 2y = 0$

25. Se tiene un triangulo ABC de coordenadas A(3; –5), B(–3; 5) y C(1; 3). Halla la coordenada del punto medio de $\overline{BC}$.

A) (1; 4) B) (–1; 4) C) (–1; 8)
D) (–1; 2) E) (1; 2)

26. Si la pendiente de una recta es 2/5 y esta pasa por P(–3; 1), ¿cuál es su ecuación?

A) $2x + 5y + 1 = 0$ B) $5x + 2y + 13 = 0$
C) $5x - 2y + 17 = 0$ D) $2x + 5y - 2 = 0$
E) $2x - 5y + 11 = 0$

27. Halla la ecuación de la recta que pasando por P(1; –2) sea perpendicular a $\overleftrightarrow{L}_1$: $2x - 3y + 1 = 0$.

A) $2x + 3y + 4 = 0$ B) $3x + 2y + 1 = 0$
C) $2x - 3y + 1 = 0$ D) $x + 2y + 3 = 0$
E) $3x - 2y - 7 = 0$

28. ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por A(–1; 2) y B(5; –1)?

A) $x + 2y - 3 = 0$ B) $x - 2y + 5 = 0$
C) $2x + y = 0$ D) $2x + y - 9 = 0$
E) $4x + y + 2 = 0$

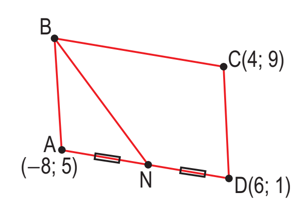
Resolución de problemas

29. Halla la distancia entre el punto de intersección de las rectas: $\overleftrightarrow{L}_1$: $3x + 2y - 1 = 0$ ∧ $\overleftrightarrow{L}_2$: $x - 3y + 7 = 0$; y el punto de intersección de las rectas:

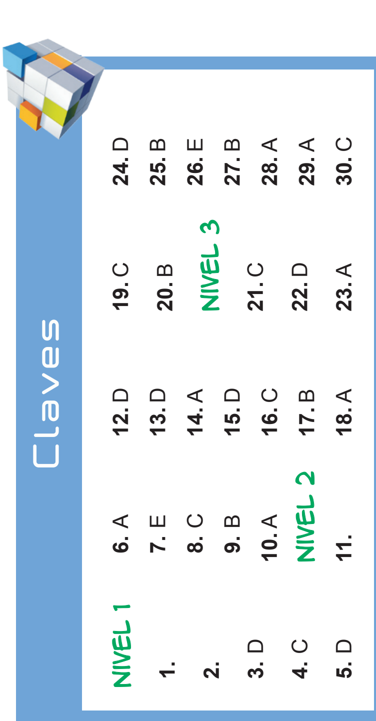
$\overleftrightarrow{L}_3$: $4x - 5y - 2 = 0$ ∧ $\overleftrightarrow{L}_4$: $2x + y - 8 = 0$

A) 4 B) 2 C) 8
D) 3 E) 6

30. Del gráfico, determina la ecuación de la recta que une los puntos B y N, si ABCD es un paralelogramo.



A) $9x - 10y + 17 = 0$ B) $9x + 10y - 14 = 0$
C) $10x + 9y - 17 = 0$ D) $10x + 9y + 8 = 0$
E) $-9x + 10y + 14 = 0$





Aplicamos lo aprendido



TEMA 3: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS DE CUALQUIER MAGNITUD

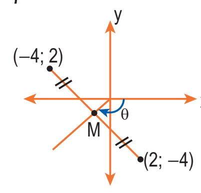
1 Si $\cot\theta = -7$ y $\text{sen}\theta < 0$; halla el valor numérico de:

$M = \sqrt{50}\cos\theta + 7\tan\theta$

A) –7 B) 6 C) –6
D) 7 E) 1

2 Del gráfico; halla:

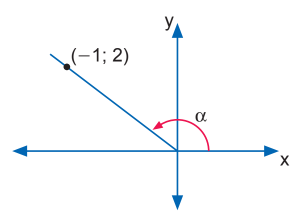
$\beta = \tan\theta - \cot\theta$



A) 2 B) –1 C) –2
D) 0 E) 1

3 De la figura, halla:

$B = \sqrt{5}\,\text{sen}\alpha - \tan\alpha$



A) –2 B) 2 C) 3
D) –4 E) 4

4 Dos ángulos coterminales están en la relación de 11 a 3. Halla el valor del menor de ellos, si el mayor se encuentra en el intervalo $\langle 450°; 500° \rangle$.

A) 135° B) 270° C) 495°
D) 300° E) 150°

5 Determina el signo de las siguientes expresiones:

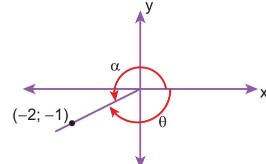
$P = \dfrac{\text{sen}195° \,.\, \cos 230°}{\tan 75°}$

$Q = \dfrac{\text{sen}140° \,.\, \cos 280°}{\tan 160°}$

$R = (\cos 200° - \cos 340°)(\text{sen}145°)$

A) (+)(+)(–) B) (+)(–)(+) C) (+)(–)(–)
D) (–)(+)(–) E) (–)(–)(+)

6 Calcula: $E = \tan\alpha - \cot\theta$



A) $-\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $-\frac{1}{4}$
D) $-\frac{3}{2}$ E) $\frac{3}{2}$

7 Determina el signo de las siguientes expresiones:

$$H = \frac{\text{sen}110° - \cos 215°}{\tan 268°}$$

$$A = \sec 295°.\csc 152°.\cot 302°$$

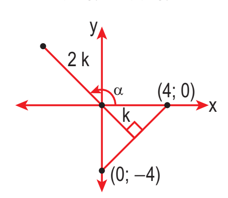
$$P = \frac{\tan 196°(1 - \text{sen}250°)}{\cos^2 100°}$$

A) (+); (+); (+) B) (+); (–); (+)
C) (+); (–); (–) D) (–); (+); (–)
E) (–); (+); (+)

8 Si los puntos (2; –4) y (6; a) pertenecen al lado final del ángulo β que se encuentra en posición normal. Halla el valor de a.

A) –10 B) 10 C) –24
D) –12 E) – 6

9 En el siguiente gráfico, halla:
$k = \tan\alpha + \cot\alpha$



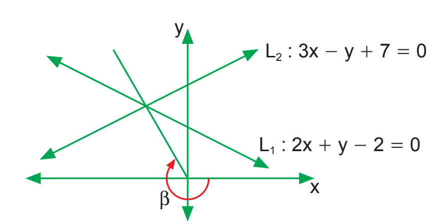
A) –1 B) –2 C) 1
D) 0 E) 2

10 Reduce la expresión:

$$M = \frac{(a+1)\cos 3\pi + (1-a)\text{sen}\frac{7\pi}{2}}{(a+1)\text{sen}\frac{5\pi}{2} - (1-a)\cos 7\pi}$$

A) 1 B) –1 C) a
D) 2 E) –a

11 Del gráfico, calcula la $\tan\beta$.



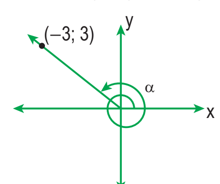
A) –2 B) –6 C) $-\frac{1}{4}$
D) –4 E) –7

12 Simplifica la expresión:

$$E = \frac{a^3 + b^3\cos^2\pi}{a^2\text{sen}^2\frac{\pi}{2} + ab\text{sen}\frac{3\pi}{2} - b^2\cos\pi}$$

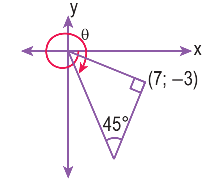
A) a + b B) a – b C) $a^3 + b^3$
D) $a^3 - b^3$ E) $a^2 + b^2$

13 Del gráfico, halla el valor de:
$M = \text{sen}(-\alpha) + \cos(-\alpha)$



A) –1 B) 1 C) $-\sqrt{2}$
D) $\sqrt{2}$ E) 0

14 Calcula la $\tan\theta$, si:



A) $-\frac{7}{2}$ B) $-\frac{8}{3}$ C) $-\frac{5}{2}$
D) $-\frac{5}{3}$ E) $-\frac{3}{2}$

Claves

1. B	3. E	5. C	7. B	9. B	11. D	13. C
2. D	4. A	6. D	8. D	10. B	12. A	14. C

Practiquemos



NIVEL 1

Comunicación matemática

1. Relaciona mediante líneas al par de ángulos coterminales:

3080° •	• 1830°
2660° •	• 2586°
3270° •	• 150°
786° •	• 2360°
4110° •	• 1580°

2. En las siguientes expresiones, completa el cuadrante al que debe pertenecer cada ángulo de modo tal que las expresiones sean verdaderas.

I. Si $\theta \in$ ____________ $\Rightarrow \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta \cdot \tan\theta > 0$

II. Si $\beta \in$ ____________ $\Rightarrow \tan\beta \cdot \cos\beta < 0$

III. Si $\alpha \in$ ____________ $\Rightarrow \cos\alpha \cdot \tan\alpha > 0$

IV. Si $\gamma \in$ ____________ $\Rightarrow \cos\gamma \cdot \tan\gamma < 0$

V. Si $\psi \in$ ____________ $\Rightarrow \operatorname{sen}\psi \cdot \tan\psi < 0$

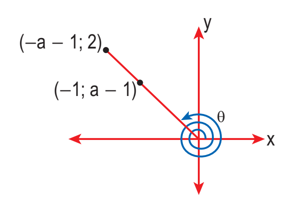
Razonamiento y demostración

3. Siendo α un ángulo en posición estándar del IIC, para el cual se tiene: $\cos\alpha = -\frac{3}{4}$. Calcula el valor de:

$P = 3\tan^2\alpha - 2\sec\alpha$

A) 1 B) 3 C) 5
D) 4 E) 2

4. Calcula el valor de $\tan\theta$.



A) $1+\sqrt{3}$ B) $1-\sqrt{3}$ C) $\sqrt{3}-2$
D) $\sqrt{3}+2$ E) $\sqrt{3}-3$

5. Calcula el valor de la expresión:

$$K = \frac{\operatorname{sen}150°.\cos210°.\tan330°}{\cos60°.\cot(-315°)}$$

A) 2 B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

6. Si el punto Q(8; 15) pertenece al lado final de un ángulo canónico β. Calcula: $R = \csc\beta - \cot\beta$.

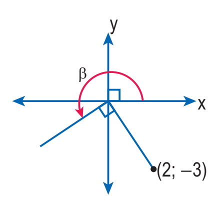
A) 0,4 B) –0,4 C) 0,6
D) –0,6 E) –0,3

7. Indica el signo de:

$$M = \frac{\operatorname{sen}150°.\cos230°.\tan315°}{\sec130°.\cot242°.\csc300°}$$

A) (+) B) (–) C) (+) ∨ (–)
D) (+) ∧ (–) E) No se puede precisar

8. Del gráfico, calcula: $\tan\beta$.



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$
D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{3}{2}$

9. Siendo $\tan\alpha = -3$ y $\operatorname{sen}\alpha > 0$.
Calcula: $P = 2\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha$

A) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ B) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ C) $2\sqrt{10}$
D) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ E) $4\sqrt{10}$

10. Calcula el valor de:

$$E = \frac{\operatorname{sen}270° + \cos90° - \tan0°}{\cos450° + \cot270° + \sec180°}$$

A) –1 B) 1 C) –2
D) 2 E) $\frac{1}{2}$

Resolución de problemas

11. Un punto del lado final del ángulo α es el baricentro del triángulo de vértices M(–4; 2), N(–1; –2) y D(2; 6). Halla el valor de $\cot\alpha$.

A) –4 B) –1 C) $-\frac{1}{2}$
D) 1 E) $\frac{1}{2}$

12. Se tiene un cuarto de circunferencia, cuyas intersecciones con los ejes son M(–4; 0) y N(0, 4) la cuerda MN es intersecada por el lado final del ángulo β dividiéndolo en 2 segmentos cuya relación es de 2 a 1. Calcula la $\tan\beta$.

A) $-\frac{4}{3}$ B) $\frac{8}{3}$ C) 2
D) $\frac{4}{3}$ E) –2

NIVEL 2

Comunicación matemática

13. Completa el siguiente cuadro según corresponda:

RT / m∠	sen – cos	csc – 1	tan + cot	sen + cos
0°	–1	ND	ND	
450°	1	0		
1260°	1	ND		
1710°	–1	–2		

14. Coloca (V) verdadero o (F) falso según corresponda, luego marca la alternativa correcta.

I. $\cos 780° \cdot \sec 430° < 0$ ( )
II. $\cot 1134° \cdot \csc 1630° > 0$ ( )
III. $2\text{sen}450° + 2\sec 1260° = 0$ ( )
IV. $3\cos 2880° + 4\sec 2700° < 0$ ( )

A) FVVF B) FFVV C) VFVV
D) VFVF E) FFVF

Razonamiento y demostración

15. Sabiendo que α es un ángulo positivo menor que una vuelta, perteneciente al IIIC, señala el signo de:

$$Q = \left(\text{sen}\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{2\alpha}{3}\right)\tan\frac{3\alpha}{5}$$

A) (+) B) (–) C) (+) ∨ (–)
D) (+) ∧ (–) E) No se puede precisar.

16. Señala los signos de:

$$M = \frac{\text{sen}140° - \cos 140°}{\tan 300° . \tan 260°}$$

$$R = \frac{\tan 160° . \cos 217° - \tan 116°}{\cos 248° + \text{sen}348°}$$

A) (–); (+) B) (+); (+) C) (+); (–)
D) (–); (–) E) (–); no se puede precisar.

17. Sabiendo que $\tan\beta = -\frac{2}{3}$ ($\beta \in$ IIC). Calcula $H = \text{sen}\beta + \cos\beta$.

A) $\frac{1}{\sqrt{13}}$ B) $-\frac{\sqrt{13}}{13}$ C) $-\frac{5}{\sqrt{13}}$
D) $\frac{5\sqrt{13}}{13}$ E) $\frac{3}{\sqrt{13}}$

18. Si $\alpha \in$ IVC, determina el signo de:

$$E = \frac{\tan\alpha(1 - \cos\alpha)}{\text{sen}\alpha - \cos\alpha}$$

A) (+) B) (–) C) (+) ∨ (–)
D) (–) ∧ (+) E) No se puede precisar

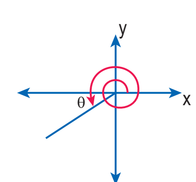
19. Señala el cuadrante al que pertenece θ si:

$\cos\theta\sqrt{-\tan\theta} > 0$

A) IC B) IIC C) IIIC
D) IVC E) No se puede precisar

20. Si: $\text{sen}\theta + 1 - 3(5^{-1}) = -5^{-1}$

Además:



Calcula: $K = \text{sen}\theta + \cos\theta$

A) $\frac{7}{5}$ B) $-\frac{7}{5}$ C) $\frac{3}{5}$
D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{3}{4}$

21. Siendo θ un ángulo cuadrantal, tal que $\theta \in \langle 250°; 320° \rangle$. Determina el valor de:

$$P = \frac{\cot\frac{\theta}{3} + \cos\frac{\theta}{6}}{\csc\theta}$$

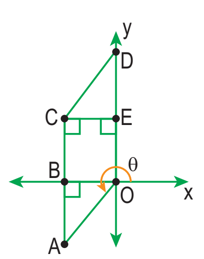
A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $-\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Resolución de problemas

22. Se tiene un triángulo $\triangle ABC$ recto en B(A ∈ IIIC), el segmento con extremos A(–3; m) y C(0; 0) es el lado final del ángulo θ. Si B ∈ x y el área del $\triangle ABC$ es 6, halla el valor de: $P = \tan\theta \cdot \text{sen}\theta$.

A) 3/4 B) 8/9 C) –3/4
D) –16/15 E) 8/15

23. De la siguiente figura: AB = BC = CD; ∠DCE = 53°.



Halla el valor de: $k = \cot\theta$

A) 3/4 B) 4/3 C) 3/5
D) 4/5 E) 5/4

NIVEL 3

Comunicación matemática

24. De las siguientes proposiciones:

I. $\text{sen}127° \cdot \cos 135° > 0$
II. $\sec 0° + 1 = 0$
III. $\tan 1880° \cdot \cot 2050° > 0$
IV. $\text{sen}760° \cdot \cos 870° < 0$

Son incorrectas:

A) Solo I B) Solo II C) Solo II
D) I y III E) I y II

25. Si: $M = (\sec^2\theta - 1)(\csc^2\theta - 1)$; $\theta \in IC$

Son necesarios para calcular el valor numérico de M:

I. $\sec\theta = \frac{5}{4}$

II. $\csc\theta = \frac{5}{3}$

III. $\theta = 37°$

A) Solo III
B) I y II
C) II y III
D) I y III
E) No es necesario ningún dato

Razonamiento y demostración

26. De la condición: $169\text{sen}^2\theta - 25 = 0$; $\theta \in IIIC$.

Calcula: $E = 12\tan\theta + 13\cos\theta$

A) $-\frac{1}{7}$
B) –6
C) –5
D) $\sqrt{6}$
E) –7

27. Calcula el número de ángulos cuadrantales entre 1000° y 1500°.

A) 3
B) 4
C) 5
D) 2
E) 6

28. Halla el signo de la expresión:

$$R = \frac{\csc\theta + \cos\theta}{\tan\theta}$$

Si se cumple que $\sqrt{\cot\theta}\,\text{sen}\theta < 0$.

A) (–)
B) (+)
C) $(+) \vee (-)$
D) $(+) \wedge (-)$
E) No se puede precisar

29. Simplifica:

$$M = \frac{\text{sen}(-x)}{\text{sen}(\pi + x)} + \frac{\cos(-x)}{\cos(2\pi - x)} + \frac{\sec(-x)}{\sec(2\pi + x)}$$

A) –3
B) 1
C) 2
D) –1
E) 3

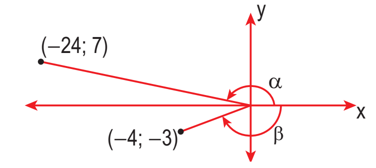
30. Si el lado final de un ángulo canónico θ pasa por los puntos $A(m + n; n)$ y $B(n; m - n)$. Calcula:

$K = \cot^2\theta + \tan^2\theta$

A) 2
B) 4
C) 6
D) 8
E) 12

31. De acuerdo al gráfico, calcula:

$K = 5\cos\alpha - \cos\beta$



A) –2
B) –3
C) –4
D) 2
E) 4

32. Simplifica:

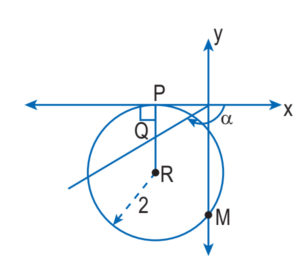
$$L = \frac{(a+b)^2\text{sen}^3\frac{\pi}{2} + (a-b)^2\cos^5\pi}{a\,\text{sen}\frac{3\pi}{2} + b\cos^2\frac{\pi}{2}}$$

A) 2a
B) –2a
C) 4a
D) –4a
E) –4b

Resolución de problemas

33. En la figura se cumple lo siguiente:

PQ = QR y M = (0; –3)



Halla el valor de:

$t = \cot^2\alpha + \csc^2\alpha$

A) 3
B) 4
C) 7
D) 9
E) 5

34. Un triángulo ΔABC, recto en B ($A \in IIC$, $B \in IC$). Si $m\angle ABC = 45°$; $A = (-3; 4)$ y $C = (0; 0)$. Halla la cotangente del ángulo en posición normal que tiene su lado final en el segmento CB.

A) 2/3
B) 1/3
C) 3/4
D) 1
E) 3



Claves

NIVEL 1
1.
2.
3. C
4. B
5. C
6. C
7. A
8. B
9. A
10. B
11. C
12. E

NIVEL 2
13.
14. B
15. B
16. D
17. B
18. A
19. D
20. B
21. E
22. D
23. C

NIVEL 3
24. E
25. E
26. E
27. C
28. A
29. E
30. C
31. C
32. E
33. C
34. B

Aplicamos lo aprendido



TEMA 4: REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

1 Halla el valor de:

$$E = \frac{\text{sen}1230° - \text{sen}870° + \cot 405° + 1}{\text{sen}1200° - \cos 840° + \cot 495°}$$

A) $2(\sqrt{3} + 1)$ B) $\sqrt{3} - 1$ C) $\sqrt{3}$
D) $\sqrt{3} + 2$ E) $2(\sqrt{3} - 2)$

2 Determina el valor de P:

$$P = 2\text{sen}\left(231\frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{5}\cos\left(49\frac{\pi}{2}\right)$$

A) 1 B) –2 C) 3
D) 4 E) 5

3 Simplifica:

$$M = \frac{\text{sen}(\pi - \alpha).\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha).\tan(\pi - \alpha)}{\cot(\frac{\pi}{2} - \alpha).\sec(\frac{\pi}{2} + \alpha).\csc(\pi - \alpha)}$$

A) $\text{sen}^4\alpha$ B) $-\cos^4\alpha$ C) $\text{sen}^3\alpha$
D) $\cos^3\alpha$ E) $-\text{sen}^4\alpha$

4 Reduce:

$$P = \frac{\text{sen}(230° + \theta).\tan(300° - \theta)}{\tan(60° + \theta).\cos(400° - \theta)}$$

A) –2 B) –1 C) 0
D) 1 E) 2

5 Halla un equivalente de:

$H = \cot(5\pi + 2\theta)$

A) $\tan 2\theta$ B) $-\tan 2\theta$ C) $\tan\theta$
D) $-\cot 2\theta$ E) $\cot 2\theta$

6 Si $A + B + C = \pi$, calcula:

$$E = \frac{\text{sen}(A + 2B + C)}{\text{sen}(A + C)}$$

A) 4 B) 7 C) 0
D) –1 E) 1

7 Si cosx – cosy = 1; x + y = 180°
Calcula $M = \sec^2 x + 2$.

A) 4 B) 6 C) 7
D) 3 E) 5

8 Calcula:

$$M = \frac{\sec 300° - \cos 135°}{\text{sen}135° - \csc 210°}$$

A) 2 B) $\sqrt{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
D) 0 E) 1

9 Si α y θ son complementarios, reduce:

$$M = \frac{\text{sen}(\alpha + 2\theta).\tan(2\alpha + 3\theta)}{\cos(2\alpha + \theta).\tan(4\alpha + 3\theta)}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) senα E) sen2θ

10 Simplifica:

$$A = \frac{\tan(99\pi + x).\cos\left(\frac{37\pi}{2} + x\right).\sec(90\pi + x)}{\cot\left(\frac{91\pi}{2} + x\right)\text{sen}(40\pi + x)}$$

A) cosx B) senx C) tanx
D) secx E) cscx

11 Si sen40° = k, a que es igual:

$$E = \frac{\text{sen}140°.\cos 130°.\tan 230°}{\cot 220°.\sec 310°.\csc 320°}$$

A) k^{-4} B) k^4 C) k^2
D) k^{-2} E) k

12 Calcula:

$$E = \tan\frac{\pi}{12} + \tan\frac{5\pi}{12} - \tan\frac{7\pi}{12} - \tan\frac{11\pi}{12}$$

A) 4 B) 6 C) 10
D) 8 E) 2

13 Si $a + b = \frac{\pi}{2}$.

Calcula: $R = \frac{\tan a + \tan b}{\sec a.\csc a} + \frac{\text{sen}(5a + 4b)}{\cos(4a + 5b)}$

A) 2 B) –2 C) 1
D) –1 E) 0

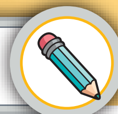
14 Calcula:
S = cos1° + cos2° + cos3° + ... + cos179° + cos180°

A) –1 B) 2 C) 1
D) –2 E) 0

Claves

1. A	3. E	5. E	7. B	9. A	11. B	13. A
2. B	4. D	6. D	8. E	10. D	12. D	14. C

Practiquemos



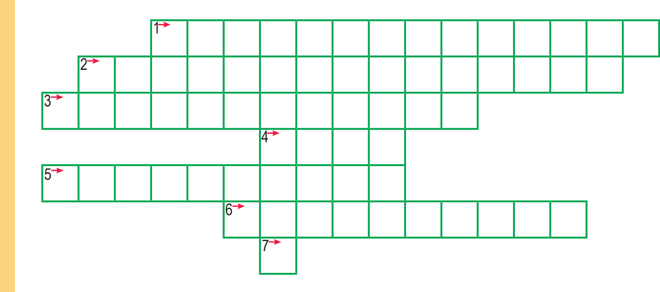
NIVEL 1

Comunicación matemática

1. Crucigrama

Completa el siguiente crucigrama y descubre el nombre de un matemático.

1. Ángulos cuya suma de medidas es 180°.
2. Ángulos cuya suma de medidas es 90°.
3. Ángulos trigonométricos que poseen el mismo vértice, el mismo lado inicial y final.
4. Segunda letra del alfabeto griego.
5. Ángulo en posición normal, cuyo lado final coincide con un semieje del plano cartesiano.
6. Lado de mayor longitud de un triángulo rectángulo.
7. Valor de P, donde:
   $P = -z\text{sen}(180° + 30°) + z\text{sen}(180° - 30°)$



2. Relaciona según corresponda:

tan 135°	1
tan 225°	0
cot 270°	–1

Razonamiento y demostración

3. Calcula: tan2933°.

A) $\frac{3}{4}$ B) $-\frac{3}{4}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $-\frac{4}{3}$ E) $-\frac{3}{5}$

4. Calcula:

$L = \frac{\tan(-60°)}{\cos(-45°)}$

A) $\sqrt{3}$ B) $-\sqrt{3}$ C) $\sqrt{5}$ D) $-\sqrt{6}$ E) –6

5. Halla el valor de: $\cos 1741\pi$.

A) 1 B) –1 C) 0 D) 1/2 E) –1/2

6. Calcula: tan5520°.

A) $\sqrt{3}$ B) $-\sqrt{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
D) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

7. Halla:

$\tan\frac{17\pi}{3}$.

A) 1 B) –1 C) $\sqrt{3}$
D) $-\sqrt{3}$ E) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

8. Calcula: $C = (\text{sen}330° + \cos240°)\tan210°$

A) $\sqrt{3}$ B) $-\sqrt{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
D) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$

9. Calcula:

$K = \frac{\text{sen}120°.\cos240°.\tan300°}{\sec225°}$

A) $\frac{\sqrt{2}}{6}$ B) $-\frac{\sqrt{2}}{6}$ C) $\frac{3\sqrt{2}}{8}$
D) $-\frac{3\sqrt{2}}{8}$ E) $-\frac{\sqrt{2}}{8}$

10. Calcula: $U = (\cos^2 135° - 3\tan127°)\sec^2 240°$

A) 16 B) 18 C) 32
D) 9 E) 10

NIVEL 2

Comunicación matemática

11. Indica verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

I. csc(4230°) = – 1 ( )
II. sen(4050°) = 1 ( )
III. sec(1260°) = –1 ( )

12. Relaciona según corresponda:

$\text{sen}(-5\pi)$	$\tan\alpha$
$\tan(\alpha - 6\pi)$	$-\sec\alpha$
$\sec(\alpha - 3\pi)$	0

Razonamiento y demostración

13. Reduce:

$$A = \frac{\operatorname{sen}(-x) + \cos(-x)}{\operatorname{sen}x - \cos x}$$

A) 1 B) –1 C) 2
D) –2 E) 0

14. Reduce:

$$C = \frac{\operatorname{sen}(\pi + x).\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right).\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)}{\cot(\pi - x).\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}$$

A) senx B) cosx C) –senx
D) –cosx E) –1

15. Reduce:

$$I = \frac{\operatorname{sen}(x - \pi).\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)}$$

A) cotx B) –cotx C) –senx
D) 1 E) –1

16. Reduce:

$$E = \frac{\operatorname{sen}(180° - \phi).\tan(360° - \phi)}{\cos(270° + \phi).\cot(90° + \phi)}$$

A) 1 B) –1 C) $\tan\phi$
D) $\cos 2\phi$ E) $\tan 2\phi$

17. Reduce:

$$L = \frac{\tan(\pi - x).\cot(2\pi - x).\sec(3\pi - x)}{\sec x.\tan(x - \pi).\cot(x - 2\pi)}$$

A) –1 B) 1 C) secx
D) cot2x E) tan2x

18. Calcula el valor de:

$$P = \tan^3\frac{\pi}{12} + \tan^3\frac{5\pi}{12} + \tan^3\frac{7\pi}{12} + \tan^3\frac{11\pi}{12}$$

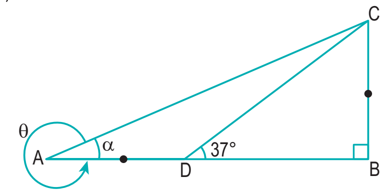
A) –1 B) 1 C) 0
D) $2 - \sqrt{3}$ E) $\sqrt{3} - 2$

19. Si **x** e **y** son ángulos complementarios, reduce:

$$M = \frac{\operatorname{sen}(2x + 3y)\cos(x + 2y)}{\operatorname{sen}(y + 2x)\cos(2y + 3x)}$$

A) –1 B) 1 C) cos2x
D) seny E) cosy

20. Del gráfico, halla $\tan\theta$.



A) $\frac{3}{4}$ B) $-\frac{3}{4}$ C) $\frac{3}{7}$
D) $-\frac{3}{7}$ E) $-\frac{4}{7}$

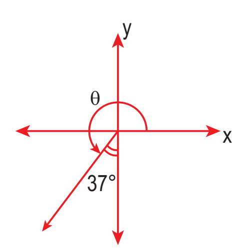
NIVEL 3

Comunicación matemática

21. Indica verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

I. $\operatorname{sen}(1900° + x) = \cos(10 + x)$ ( )
II. $\cos(\theta - 1302°) = -\operatorname{sen}(\theta + 48°)$ ( )
III. $\tan(3611° + b) = \cot(79° - b)$ ( )

22. Observa la gráfica y luego completa:



$\tan\theta =$ $\operatorname{sen}\theta =$ $\cos\theta =$

Razonamiento y demostración

23. Si sen40° = n, halla la siguiente expresión en términos de n.

$$K = \frac{\operatorname{sen}140°.\cos 130°}{\sec 410°}$$

A) n^2 B) $\frac{1}{n^2}$ C) n^3
D) $\frac{1}{n^3}$ E) $-n^3$

24. En un triángulo ABC, halla el valor de:

$$K = \frac{\sec(A + 2B + C)}{\csc\left[\frac{1}{2}(A + 3B + C)\right]}$$

A) 1 B) sec2B C) csc2B
D) –1 E) cos2B

25. Si $\sec\alpha = -2$, halla el valor de:

$$A = \frac{1 + \operatorname{sen}\left(\alpha - \frac{7\pi}{2}\right).\cos(\alpha - 3\pi)}{1 - \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right).\cot(2\pi - \alpha)}$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D) $-\frac{1}{2}$ E) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

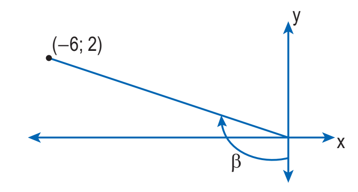
26. Calcula:

$L = \cos10° + \cos20° + \cos30° + \ldots + \cos180°$

A) 1 B) 2 C) 0

D) –1 E) –2

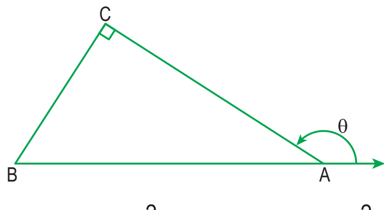
27. Del gráfico, calcula $\tan\beta$.



A) $\frac{1}{3}$ B) 3 C) –3

D) $-\frac{1}{3}$ E) –6

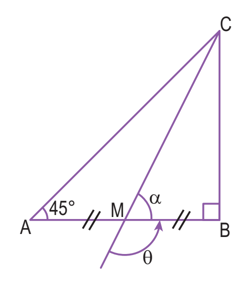
28. De la figura adjunta, calcula: $\tan\theta + \sec\theta$.
siendo $AB = 13 \wedge BC = 5$.



A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $-\frac{2}{3}$

D) $-\frac{3}{2}$ E) $-\frac{3}{4}$

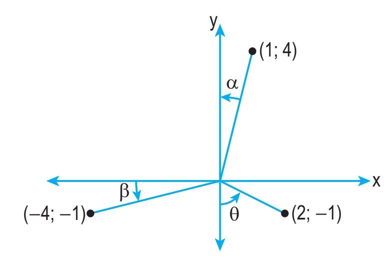
29. Del gráfico, calcula $\tan\theta$.



A) 1 B) 2 C) –1

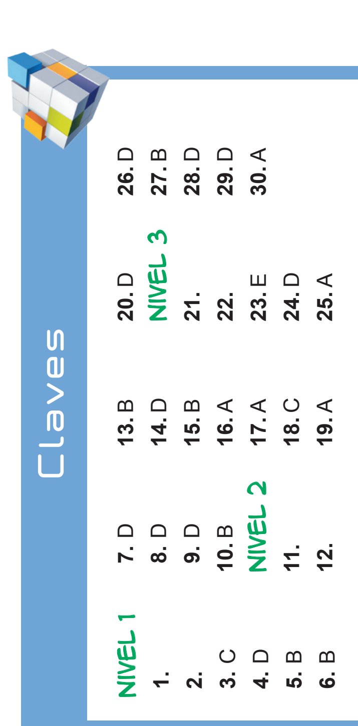
D) –2 E) $\frac{3}{4}$

30. De la figura, calcula $P = (\tan\alpha + \tan\beta + \tan\theta)^2$.



A) $\frac{25}{4}$ B) $\frac{3}{2}$ C) 2

D) $\frac{1}{7}$ E) $\sqrt{3}$

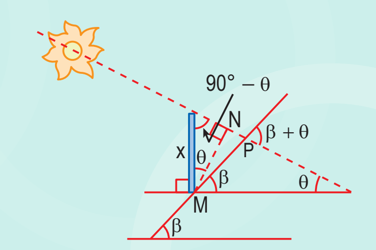


Claves

NIVEL 1		NIVEL 2		NIVEL 3	
1.	7. D	11.	17. A	21.	27. B
2.	8. D	12.	18. C	22.	28. D
3. C	9. D	13. B	19. A	23. E	29. D
4. D	10. B	14. D	20. D	24. D	30. A
5. B		15. B		25. A	
6. B		16. A		26. D	

Un poste vertical está sobre la falda de un cerro, que posee un ángulo de elevación β respecto a la horizontal. Calcula la altura del poste, si cuando el ángulo de elevación del sol mide θ, la sombra proyectada del poste sobre la falda mide P m.

Resolución:



Del gráfico tenemos:

$MN = x\cos\theta = P\operatorname{sen}(\beta + \theta)$ m

$\therefore\ x = P\operatorname{sen}(\beta + \theta)\sec\theta$ m

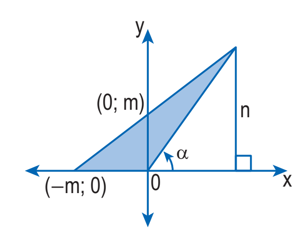


1. Una persona camina con un rumbo tal que al haber caminado ax km se percata que ha recorrido varios kilómetros más hacia el norte que hacia el oeste. Si al oeste recorre x km, calcula el coseno del ángulo del rumbo con el camino.

A) $\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}$ B) $\sqrt{a^2-1}$ C) $x\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}$

D) $x\sqrt{1-\frac{x}{a}}$ E) $\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$

2. Del gráfico mostrado, calcula el valor de $\cot\alpha$, si el área del triángulo sombreado es 4,5 u^2, además, m y n son números enteros.



A) 9/8 B) 3/2 C) 2/3

D) 8/9 E) 4/9

3. Si: $|\operatorname{sen}\theta| = -\operatorname{sen}\theta \ \wedge\ \cos\theta = 4/5$

Halla el valor de: $k = \tan\theta + \cot\theta$

A) $\frac{12}{25}$ B) $\frac{-25}{12}$ C) $\frac{-25}{13}$

D) $\frac{14}{25}$ E) $\frac{3}{4}$

4. Si θ pertenece al tercer cuadrante, halla el signo de las siguientes expresiones (θ es menor a 1 vuelta).

$P = \cos\frac{\theta}{4} \times \tan\frac{\theta}{2} \times \operatorname{sen}2\theta$ y

$Q = \operatorname{sen}\frac{\theta}{4} \times \cot\theta \times \cos\frac{\theta}{3}$

A) (–) o (+); (–) B) (+); (–) C) (–); (+)

D) (–); (–) E) (+); (+)

5. Si $\theta \in$ IIIC; $p > 0$ y $\cos\theta = \frac{p}{a-q}$, entonces se cumple:

A) $q + p > a < q - p$ B) $q - p > a$

C) $q + a < p$ D) $q + p > a$

E) $a - p < q$

6. A partir del siguiente gráfico, halla al valor de $\tan\theta$:

$y = 11 - x$ $y = \frac{x}{2} + 8$

A) $\frac{11}{2}$ B) $\frac{2}{9}$ C) $\frac{-2}{9}$

D) $\frac{2}{7}$ E) $\frac{-7}{2}$

7. Una persona de estatura h, observa la parte superior de un árbol bajo un ángulo de 45° y la parte superior de este con un ángulo de elevación de θ, calcula la altura del árbol.

A) $h\tan\theta$ B) $h\csc\theta + \sec\theta$ C) $h(\tan\theta + 1)$

D) $h(\cot\theta + 1)$ E) $h(\csc\theta + 1)$

8. En el siguiente gráfico, se tiene $\tan\theta = 4$ y $\tan\beta = 1/2$. Halla la ecuación de la recta L.

$y = x^2$

A) $y = 9/2x - 2$ B) $y = 4x + 3$ C) $y = 9x + 2$

D) $y = 3x - 4$ E) $y = 3x - 2$

9. Si: $\tan((6k + 1)\pi/2 + \theta) = -1/2$; $k \in \mathbb{Z}$

Calcula:

$$P = \sqrt{\frac{-\csc^2\left(37\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\cos\left(-7\frac{\pi}{2}+\theta\right)\times\operatorname{sen}(-7\pi-\theta)}}$$

A) 2/5 B) 4/5 C) 25/4

D) 5/2 E) 4/25


Trigonometría
Trigonometría
Trigonometría
Trigonometría
Trigonometría
Trigonometría
Unidad 3

RECUERDA

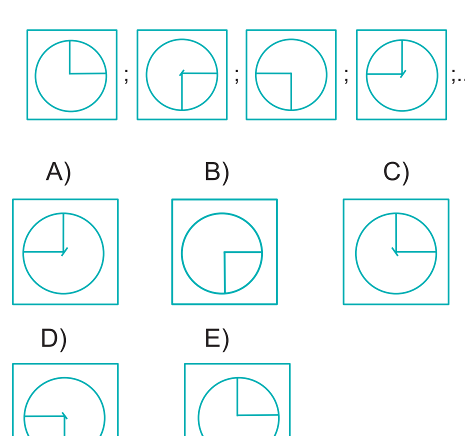
(Años 1777-1855)	Gauss, Karl Friedrich-alemán	Nació cerca de Brunswick y murió en Gotinga. Matemático, físico y astrónomo, se le suele llamar Príncipe de la Matemática. Niño prodigio, aprendió a contar antes que hablar. En su tesis de doctorado (1799) demostró por primera vez el teorema fundamental del Álgebra. Dio unidad y amplitud a la teoría de los números. En su obra maestra Disquisiciones aritméticas inventa el concepto de números congruentes módulo p; descubrió la ley de reciprocidad cuadrática; sistematizó la teoría de los números complejos. En análisis, investiga las funciones de variables complejas; descubre la doble periodicidad de las funciones elípticas. En geometría introduce las coordenadas curvilíneas (o gaussianas). Crea de esta manera la geometría intrínseca. Creó la geometría diferencial; la teoría de las representaciones conformes y emprendió el estudio de la topología; el método de los mínimos cuadrados; la campana de Gauss o curva normal de errores.
(Años 1781-1848)	Bolzano, Bernhard-alemán	Matemático nacido en Praga, fue sacerdote católico. Es uno de los iniciadores de la fundamentación rigurosa del análisis mediante su aritmetización. Formuló el concepto de función continua y sus teoremas fundamentales. Las modernas teorías del infinito hallan también en Bolzano un precursor. Expuso sus originales concepciones en las Paradojas del infinito.

Reflexiona

- *Lo que deseas conseguir, más fácil lo obtendrás con una sonrisa que con la punta de la espada.*
- *La prudencia es la mitad de la valentía.*
- *El atardecer de la vida trae consigo su lámpara.*
- *Las verdades son como las estrellas: no todos las pueden ver al mismo tiempo.*

¡Razona...!

Halla la figura que sigue:



Aplicamos lo aprendido



TEMA 1: CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA

1 Halla el intervalo de m, si:

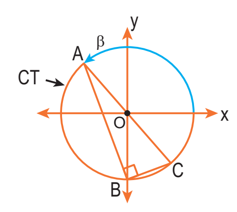
$$\cos\beta = \frac{m-1}{3} + \frac{3-m}{2}$$

A) [2; 6] B) [–1; 13] C) [1; 13]
D) [–2; 6] E) [6; 13]

2 Si $\alpha \in$ IIC, determina la variación de:
$P = 8\cot\alpha + 7$

A) $\langle -\infty; -8\rangle$ B) $\langle -\infty; 7\rangle$ C) $\langle -\infty; -7\rangle$
D) $\langle -\infty; 8\rangle$ E) $\langle -\infty; 15\rangle$

3 En la CT mostrada, calcula BC en términos de β.



A) $\sqrt{1+\text{sen}\beta}$ B) $\sqrt{1-2\text{sen}\beta}$ C) $\sqrt{2+\text{sen}\beta}$
D) $\sqrt{2-2\text{sen}\beta}$ E) $\sqrt{2+2\text{sen}\beta}$

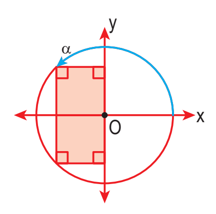
4 Ordena de mayor a menor:
I. sen30°
II. sen80°
III. sen220°
IV. sen170°

A) I > II > IV > III B) I > II > III > IV
C) II > I > III > IV D) II > IV > I > III
E) II > I > IV > III

5 Indica verdadero (V) o falso (F) según corresponda:
I. sen2° > sen2
II. cos2° > cos2

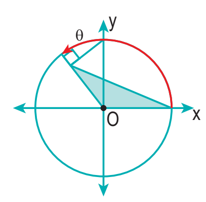
A) VV B) VF C) FV
D) FF E) Faltan datos

6 En la CT mostrada, calcula el área sombreada.



A) $\csc\alpha - \text{sen}\alpha$ B) $\text{sen}\alpha\cos\alpha$
C) $-2\text{sen}\alpha\cos\alpha$ D) $\text{sen}\alpha - \cos\alpha$
E) $\sec\alpha\,\text{sen}\alpha$

7 En la CT mostrada, calcula el área sombreada.

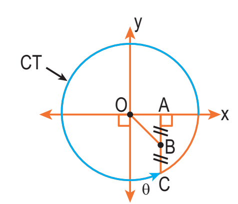


A) $\operatorname{sen}^2\theta$ B) $0{,}5\operatorname{sen}^2\theta$ C) $\tan^2\theta$
D) $\cos^2\theta$ E) $0{,}5\cos^2\theta$

8 Determina la variación de:
$k = 2\operatorname{sen}2\alpha - 1$

A) [−2; +2] B) [−4; −2] C) [−2; 4]
D) [−3; 4] E) [−3; 1]

9 En la CT mostrada, halla el valor de $\overline{OB}$ en términos de θ.

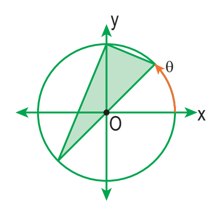


A) $\dfrac{\sqrt{2\cos^2\theta - 1}}{2}$ B) $\dfrac{\sqrt{2 - \cos^2\theta}}{2}$ C) $\dfrac{\sqrt{3\cos^2\theta + 1}}{2}$
D) $\dfrac{\sqrt{2\cos^2\theta + 1}}{2}$ E) $\dfrac{\sqrt{2 - 3\cos^2\theta}}{2}$

10 Halla el intervalo de P, si:
$2\operatorname{sen}\beta = \dfrac{P+2}{3} - \dfrac{5+P}{4}$

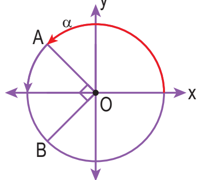
A) [−24; 31] B) [−17; 31] C) [−12; 19]
D) [−17; 24] E) [17; 31]

11 Halla el área de la región sombreada en la CT



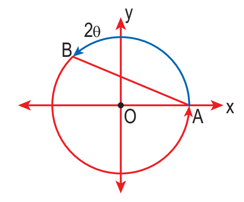
A) senθ B) 0,5 senθ C) cotθ
D) cosθ E) 0,5cosθ

12 En la CT mostrada calcula las coordenadas del punto B.



A) (−cosα; senα) B) (senα; cosα)
C) (−senα; −cosα) D) (−senα; cosα)
E) (cosα; senα)

13 En la CT mostrada, calcula AB en términos de θ.



A) 2sen2θ B) −2sen2θ C) 2senθ
D) 2cosθ E) −2cos2θ

14 En la CT mostrada, calcula el área sombreada.

A) 1 + senα − cosα B) 0,5(1 − senα + cosα)
C) senα + cosα D) 1 + tanα + cotα
E) 0,5(1 − tanα − cotα)

Claves

1. C	3. D	5. C	7. B	9. C	11. D	13. C
2. B	4. E	6. C	8. E	10. B	12. D	14. E



Practiquemos

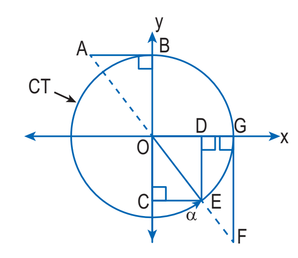
NIVEL 1

Comunicación matemática

1. Relaciona cada elemento de la CT con su respectiva coordenada:

Origen de arcos	•	• (0; 1)
Origen de coordenadas	•	• (1; 0)
Origen de complementa de arcos	•	• (0; 0)
Origen de suplementos de arcos	•	• (–1; 0)

2. En el gráfico indica las razones trigonométricas dibujadas.



Razonamiento y demostración

3. Indica verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

I. $\text{sen}20° > \text{sen}80°$
II. $\text{sen}190° > \text{sen}250°$

A) VF B) VV C) FF
D) FV E) Faltan datos.

4. Indica verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

I. $\text{sen}20° < \cos20°$
II. $\cos80° > \text{sen}80°$

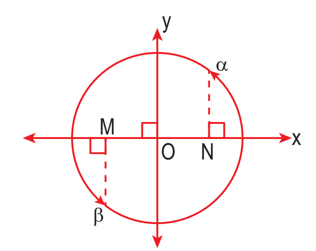
A) VV B) FV C) VF
D) FF E) Faltan datos.

5. Indica verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

I. $\text{sen}100° + \cos100° < 0$
II. $\text{sen}170° + \cos170° > 0$

A) VV B) VV C) FV
D) FF E) Faltan datos.

6. La circunferencia es trigonométrica, calcula la longitud del segmento MN.



A) $\text{sen}\alpha + \text{sen}\beta$ B) $\text{sen}\beta - \text{sen}\beta$ C) $\cos\alpha + \cos\beta$
D) $\cos\alpha - \cos\beta$ E) $\cos\beta - \cos\alpha$

7. Halla el intervalo de x, a partir de:

$\text{sen}\theta = \dfrac{2x-5}{3}$

A) [1; 3] B) [1; 4] C) [2; 5] D) [2; 4] E) [1; 5]

8. Determina la variación de:

$P = \tan x + 2$

A) $\langle -\infty; 2]$ B) $[2; +\infty]$ C) $\langle 4; +\infty\rangle$
D) $\langle -\infty; 8\rangle$ E) $\mathbb{R}$

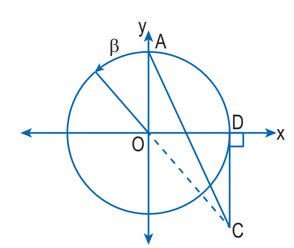
9. Si $\beta \in$ IIC, halla la variación de la siguiente expresión:

$E = 4 - 3\text{sen}\beta$

A) [1; 7] B) $[1; 3\rangle$ C) $\langle 1; 7\rangle$ D) $[1; 4\rangle$ E) $\langle 1; 4\rangle$

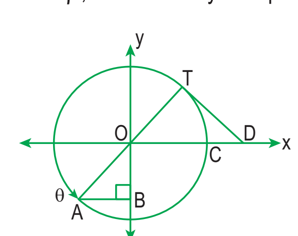
Resolución de problemas

10. Halla la distancia entre el origen de coordenadas y la intersección de $\overline{AC}$ con el eje x, en términos de β. (D es punto de tangencia)



A) $\dfrac{1}{(1+\cot\beta)}$ B) $\dfrac{1}{(1-\cot\beta)}$ C) $\dfrac{1}{(1+\tan\beta)}$
D) $\dfrac{1}{(1-\tan\beta)}$ E) $\dfrac{1}{(2\tan\beta)}$

11. Del gráfico calcula $\cos\beta$, si AB = CD y T es punto de tangencia.



A) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ B) $\dfrac{2+\sqrt{5}}{2}$ C) $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$
D) $\dfrac{2-\sqrt{5}}{2}$ E) $\dfrac{-\sqrt{5}}{2}$

NIVEL 2

Comunicación matemática

12. De las siguientes proposiciones:

I. $\text{sen}100° > \text{sen}140°$
II. $\text{sen}350° < \text{sen}290°$
III. $\cos10° < \cos50°$
IV. $\cos200° > \cos250°$

Son falsas:

A) I y III B) II y IV
C) I; II y IV D) II; III y IV
E) I; II y III

13. Representa en la recta numérica las variaciones de las razones trigonométricas.

I. senx

II. cosx

III. tanx; $x \in \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$

IV. secx; $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$

V. cscx; $\forall x \in \mathbb{R} - \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$

Razonamiento y demostración

14. Determina el máximo valor de:

$P = \sqrt{3}\,\tan\alpha + 1$

si $\alpha \in [0; 60°]$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

15. Si se cumple: $2 + \sqrt{\text{senx} - 1} = \sqrt{8 + 5\cos\theta}$ donde $\theta \in$ IIIC; calcula el valor de la siguiente expresión:

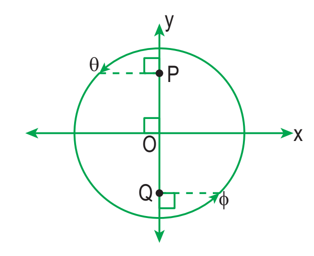
$$3\cot\theta + 3\csc x$$

A) –2 B) 0 C) 2
D) 4 E) 6

16. Ordena de menor a mayor: tan40°; tan130°; tan70°

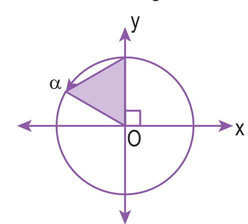
A) tan40° < tan70° < tan130°
B) tan130° < tan70° < tan40°
C) tan130° < tan40° < tan70°
D) tan40° < tan130° < tan70°
E) tan70° < tan40° < tan130°

17. En la circunferencia trigonométrica, calcula la longitud del segmento PQ.



A) senθ – senϕ B) senθ + senϕ
C) cosθ + cosϕ D) cosθ – cosϕ
E) cosθ – senϕ

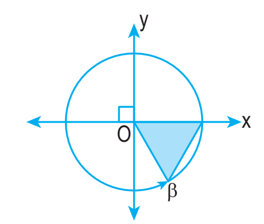
18. En la circunferencia trigonométrica, calcula el área del triángulo sombreado:



A) $\frac{\text{sen}\alpha}{2}$ B) $-\frac{\text{sen}\alpha}{2}$ C) $\frac{\cos\alpha}{2}$

D) $-\frac{\cos\alpha}{2}$ E) cosα

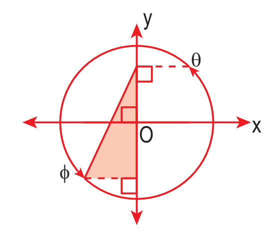
19. En la circunferencia trigonométrica, calcula el área del triángulo sombreado:



A) $\frac{\text{sen}\beta}{2}$ B) $-\frac{\text{sen}\beta}{2}$ C) $\frac{\cos\beta}{2}$

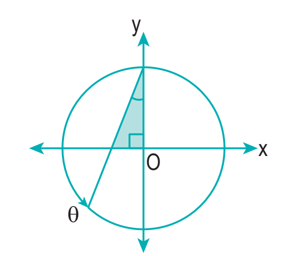
D) $-\frac{\cos\beta}{2}$ E) –senβ

20. En la circunferencia trigonométrica, calcula el área del triángulo sombreado.



A) –0,5cosϕ(senθ – senϕ)
B) 0,5cosϕ(senθ – senϕ)
C) 0,5cosϕ(senθ + senϕ)
D) –0,5cosϕ(senθ + senϕ)
E) 0,5cosϕ(cosθ – cosϕ)

21. En la circunferencia trigonométrica, calcula el área del triángulo sombreado.



A) $\frac{\text{sen}\theta}{2(\cos\theta - 1)}$ B) $\frac{\cos\theta}{2(\text{sen}\theta - 1)}$

C) $\frac{\text{sen}\theta}{2(\cos\theta + 1)}$ D) $\frac{\cos\theta}{2(\text{sen}\theta + 1)}$

E) cos60°

Resolución de problemas

22. En una CT se ubican dos arcos positivos α y β; α en el primer cuadrante y β en el segundo cuadrante. El segmento MN une los extremos de los dos arcos y el segmento trazado corta al eje de las ordenadas en el punto (O; K). Halla k en términos de α y β.

A) $\frac{\text{sen}\beta\cos\beta - \text{sen}\alpha\cos\beta}{\text{sen}\alpha - \text{sen}\beta}$

B) $\frac{\text{sen}\alpha\cos\beta + \text{sen}\beta\cos\alpha}{\text{sen}\alpha + \cos\beta}$

C) $\frac{\text{sen}\beta\cos\alpha - \text{sen}\alpha\cos\beta}{\cos\alpha - \cos\beta}$

D) $\frac{\text{sen}\beta\cos\alpha + \text{sen}\alpha\cos\beta}{\cos\alpha - \cos\beta}$

E) $\frac{(\text{sen}\beta\cos\alpha + \text{sen}\alpha\cos\beta)}{(\cos\alpha - \cos\beta)}$

23. Siendo θ un ángulo perteneciente al IIIC, determina la variación de:

$R = \frac{\text{sen}^2\theta + 1}{\text{sen}^2\theta + 4}$

A) ⟨1/4; 2/5⟩ B) ⟨1/2; 3/5⟩
C) ⟨1/5; 3/4⟩ D) ⟨2/5; 3/4⟩
E) ⟨3/5; 1⟩

NIVEL 3

Comunicación matemática

24. Compara las siguientes cantidades:

(M) La suma de todos los valores enteros de a, si:

$\cos x = \frac{3a - 5}{4}$

(N) La suma de todos los valores enteros de b, si:

$\text{sen}x = \frac{5b - 4}{6}$

A) M = N B) M = 2N C) 4M = N
D) 3M = 2N E) 2M = N

25. Coloca (V) verdadero o (F) falso según corresponda:

I. Si $\theta \in$ IVC $\Rightarrow$ $\tan\theta > \text{sen}\theta$ ( )

II. Si $\alpha \in$ IIC $\Rightarrow$ $\text{sen}\alpha \in [-1; 1]$ ( )

III. Si $\beta \in$ IIIC $\Rightarrow$ $\tan\beta \in \langle 0; +\infty\rangle$ ( )

IV. Si $\gamma \in$ IC $\Rightarrow$ $\cos\gamma \in \langle 0; 1\rangle$ ( )

V. Si $\psi \in$ IIC $\Rightarrow$ $\cot\psi \in \langle -\infty; 0\rangle$ ( )

Razonamiento y demostración

26. Si $20° < \theta < \alpha \leq 90°$, además.

$\cos 2\alpha + \csc 3\theta = 0$

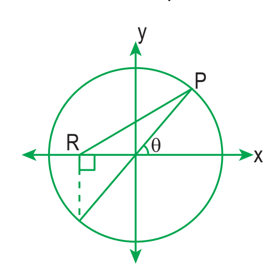
calcula: $\alpha + \theta$

A) $\frac{2\pi}{3}$ rad B) $\frac{3\pi}{4}$ rad

C) $\frac{5\pi}{6}$ rad D) π rad

E) $\frac{4\pi}{3}$ rad

27. De la circunferencia trigonométrica, calcula PR, si: $\text{sen}\theta = \frac{5}{7}$



A) $\frac{5}{7}$ B) $\frac{13}{7}$ C) $\frac{9}{7}$

D) $\frac{11}{7}$ E) 1

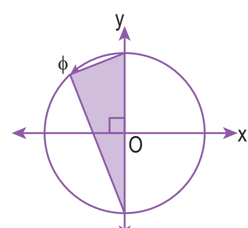
28. Halla el intervalo para x, si:

$\cos 2\theta = \frac{x-3}{2}$

A) [3; 5] B) $\langle 3; 5]$ C) $\langle 2; 5\rangle$

D) [0; 3] E) $[3; 5\rangle$

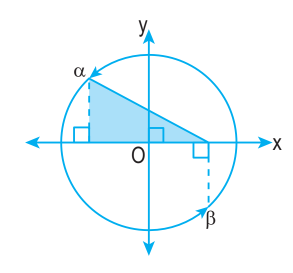
29. En la circunferencia trigonométrica, calcula el área del triángulo sombreado.



A) $\text{sen}\phi$ B) $-\text{sen}\phi$ C) $\cos\phi$

D) $-\cos\phi$ E) $\text{sen}\phi + \cos\phi$

30. En la circunferencia trigonométrica, calcula el área del triángulo sombreado.



A) $0{,}5\text{sen}\alpha(\cos\beta - \cos\alpha)$

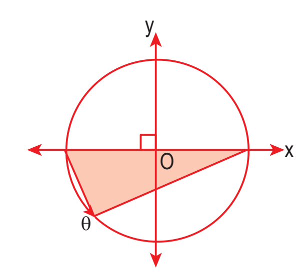
B) $-0{,}5-\text{sen}\alpha(\cos\beta - \cos\alpha)$

C) $0{,}5\text{sen}\alpha(\cos\beta + \cos\alpha)$

D) $-0{,}5\text{sen}\alpha(\cos\beta + \cos\alpha)$

E) $0{,}5\cos\alpha(\text{sen}\beta - \text{sen}\alpha)$

31. En la circunferencia trigonométrica, calcula el área del triángulo sombreado.

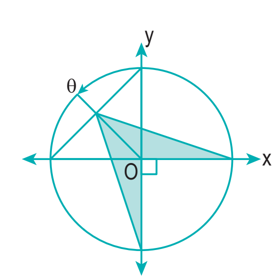


A) $\cos\theta$ B) $-\cos\theta$

C) $\text{sen}\theta$ D) $-\text{sen}\theta$

E) $\text{sen}\theta - \cos\theta$

32. En la circunferencia trigonométrica, calcula el área del cuadrilátero sombreado:



A) $0{,}5(1 - \cos\theta)$

B) $0{,}5(1 - \text{sen}\theta)$

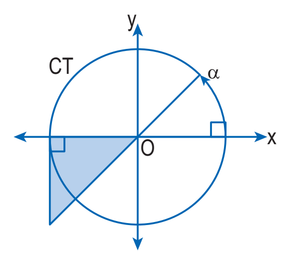
C) $0{,}5\ (1 + \cos\theta)$

D) $\frac{1}{2}(1 + \text{sen}\theta)$

E) $\frac{1}{2}$

Resolución de problemas

33. Calcula la variación del área sombreada, si: $\alpha \in [45°; 60°]$



A) $[1, \sqrt{3}]$ B) $[\sqrt{3}; 2]$

C) $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right]$ D) $\left[\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

E) $\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}; 1\right]$

34. Si: $\tan^3\alpha < 4\tan\alpha$

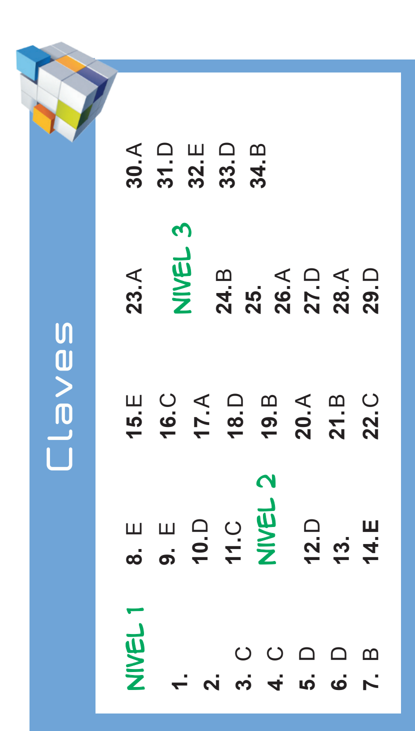
halla el valor de: $\sec\alpha \cdot \csc\alpha$

Además $\tan\alpha$ toma su máximo valor entero negativo.

A) $\frac{-1}{3}$ B) $\frac{-10}{3}$

C) $\frac{10}{3}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

E) $\frac{10}{9}$



Aplicamos lo aprendido





TEMA 2: IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

1 Reduce:

$L = (\csc\alpha + 1)(\sec\alpha - \tan\alpha)$

A) $\cos\alpha$ B) 0 C) $\cot\alpha$
D) $\tan\alpha$ E) $\text{sen}\alpha$

2 Reduce:

$R = (\csc\alpha + \cot\alpha)(\sec\alpha - 1)$

A) $\tan\alpha$ B) $\cot\alpha$ C) $\text{sen}\alpha$
D) $\cos\alpha$ E) 1

3 Si: $\sec\alpha - \cos\alpha = 3$

calcula:

$M = \sqrt{\sec^2\alpha + \cos^2\alpha - 2}$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

4 Demuestra:

$$\frac{\text{sen}\alpha - \text{sen}^3\alpha}{\cos\alpha - \cos^3\alpha} = \cot\alpha$$

5 Reduce:

$$A = \frac{(\text{sen}x + \cos x)^2 - 1}{2\text{sen}x}$$

A) $\cos x$ B) $\sec x$ C) $\tan x$
D) $\text{sen}x$ E) $\csc x$

6 Si: $\text{sen}x + \text{sen}^2x = 1$; calcula:
$R = \csc x - \text{sen}x$

A) 1 B) 2 C) –2
D) 4 E) 3

7 Simplifica:

$$H = \frac{(1+\text{sen}x+\cos x)(1-\text{sen}x-\cos x)}{\text{sen}x\cos x}$$

A) -1 B) 3 C) -2
D) -3 E) 2

8 Reduce:

$$N = \frac{\text{sen}x}{1+\cos x} + \frac{1+\cos x}{\text{sen}x}$$

A) 2senx B) 2cosx C) 2tanx
D) 2cscx E) 2secx

9 Simplifica:

$$A = \frac{(\tan\theta + \cot\theta)^3}{\csc^3\theta}$$

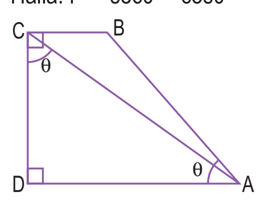
A) $\sec^3\theta$ B) 1 C) $\text{sen}^3\theta$
D) $\text{sen}\theta$ E) $\cos\theta$

10 Si: $\tan x - \cot x = \frac{3}{2}$; calcula:

$M = \tan x + \cot x + 0{,}5$

A) 1,5 B) 2,5 C) 3
D) 4,5 E) 5

11 En el gráfico mostrado, AB = AD.
Halla: $P = \sec\theta - \cos\theta$



A) $\sec\theta$ B) $\csc\theta$ C) 1
D) $\cos\theta$ E) $\text{sen}\theta$

12 Simplifica:

$$E = \frac{1+\tan x+\sec x}{1+\cot x+\csc x}$$

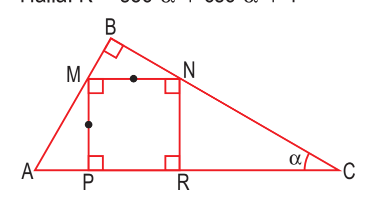
A) cotx B) senx C) secx
D) tanx E) cosx

13 Reduce:

$$B = \frac{(1+\sec x)(1+\csc x)(1-\cos x)(1-\text{sen}x)}{1+\text{sen}x(1-\csc x)}$$

A) senx B) cosx C) tanx
D) secx E) cscx

14 Del gráfico, AC = 4MN
Halla: $K = \sec^2\alpha + \csc^2\alpha + 1$



A) 5 B) 8 C) 10
D) 12 E) 17

Claves

1. C	3. B	5. A	7. C	9. A	11. C	13. B
2. A	4.	6. A	8. D	10. C	12. D	14. C

Practiquemos



NIVEL 1

Comunicación matemática

1. De las siguientes identidades trigonométricas:

I. cosx . secx = 1
II. cotx . senx = cosx
III. $sen^2x = 1 - cos^2x$
IV. $sec^2x + csc^2x = sec^2x \cdot csc^2x$
V. $cot^2x = csc^2x - 1$

¿Cuántas son pitagóricas?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

2. A continuación defina para qué valores son válidas las identidades dadas.

- $sec^2x + csc^2x = sec^2x \cdot csc^2x$

  ____

- $sen^2x = 1 - cos^2x$

  ____

- $cot^2x = csc^2x - 1$

  ____

- $sen^6x + cos^6x = 1 - 3sen^2xcos^2x$

  ____

- $sec^2x - tan^2x = 1$

  ____

Razonamiento y demostración

3. Halla:

$$M = \frac{sen^2x + cos^2x}{sec^2x - tan^2x}$$

A) senx B) cosx C) tanx
D) secx E) 1

4. Reduce:

$$S = \frac{\tan\alpha + \cot\alpha}{\sec\alpha\,\csc\alpha}$$

A) 1 B) 2 C) cotα
D) senα E) cosα

5. Reduce:

$$S = \cot\alpha \cdot \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} + \tan\alpha \cdot \frac{\cos\alpha}{sen\alpha}$$

A) 2 B) 1 C) 3
D) 2tanα E) 2cotα

6. Si: $\tan\alpha + \cot\alpha = \sqrt{6}$

halla: $R = \sqrt{\tan^2\alpha + \cot^2\alpha + 5}$

A) 3 B) 2 C) 1 D) 4 E) 6

7. Si: $\csc\theta - sen\theta = 2$
halla: $A = \csc^2\theta + sen^2\theta$

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 9

8. Reduce:

$$E = \frac{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}{sen^2\alpha}$$

A) 2 B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{4}$ E) 3

9. Si: $\cot\theta - \csc\theta = \sqrt{9}$
calcula: $S = 9(\cot\theta + \csc\theta)$

A) –2 B) –3 C) –1 D) –4 E) 4

10. Simplifica:

$$S = \frac{1+\tan^3x}{1+\tan x} + \tan x$$

A) sec^2x B) csc^2x C) 0
D) 1 E) 2

Resolución de problemas

11. Si θ es un ángulo agudo y los números senθ, tanθ y secθ están en progresión geométrica, entonces θ es igual a:

A) π/3 B) π/6 C) π/4
D) π/8 E) π/12

12. Se le encarga a un estudiante simplificar la expresión:

$$k = \sqrt{\frac{1+senx}{1-senx}} + \sqrt{\frac{1-senx}{1+senx}} + \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} + \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$$

dando como resultado:

k = –2(cscx + secx)

Pero hace la observación de que tomó un intervalo para x. ¿Cuál de los siguientes intervalos para x pudo haber utilizado el estudiante?

A) $\left\langle \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3} \right\rangle$ B) $\left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3} \right\rangle$

C) $\left\langle \frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6} \right\rangle$ D) $\left\langle \frac{10\pi}{9}; \frac{4\pi}{3} \right\rangle$

E) $\left\langle \frac{5\pi}{3}; \frac{16\pi}{9} \right\rangle$

NIVEL 2

Comunicación matemática

13. Indica (V) verdadero o (F) falso según corresponda.

I. $sen^4x + cos^4x = 1 - \frac{2}{csc^2x\,sec^2x}$ ( )

II. (cscx – cotx)(cscx + cotx) = 1 ( )

III. $\frac{\cot x \cdot senx}{\cos x} = 1$ ( )

IV. $(1 - senx - cosx)^2 = 2(1 + senx)(1 - cosx)$ ( )

A) VVFF B) VVVF C) VFVF
D) FVVF E) FVVV

14. Si: asenx + bcosx = c

$\Rightarrow senx = \frac{a}{c} \wedge \cos x = \frac{b}{c}$

¿Cuál(es) de los siguientes datos son necesarios para que se cumpla la identidad?

I. $x \in \mathbb{R}$ II. $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

II. $c \neq a + b$

A) Solo II B) Solo III C)I y III
D) II y III E) I y II

Razonamiento y demostración

15. Halla:

$$E = \frac{\csc^2\theta - \cot^2\theta}{sen^2\theta + \cos^2\theta}$$

A) 0 B) 1 C) cotq
D) tanθ E) $tan^2\theta$

16. Halla:

$$A = \left[\frac{\sec^2\theta + \csc^2\theta}{\sec^2\theta \cdot \csc^2\theta}\right]^3$$

A) 8 B) 64 C) 4
D) 1 E) 125

17. Reduce:

$$N = \frac{sec^2x - 1}{tan^2x} + \frac{csc^2x - 1}{cot^2x}$$

A) 4 B) 4 C) 0
D) 2 E) 1

18. Reduce:

$$M = \frac{sen^8x - cos^8x}{sen^2x - cos^2x} - sen^4x$$

A) 0 B) cos^4x C) 1
D) tan^2x E) tan^4x

19. Si: $\text{sen}\theta + \csc\theta = 4$

halla: $S = \sqrt[3]{\text{sen}^2\theta + \csc^2\theta + 13}$

A) 2 B) 1 C) 3
D) 4 E) 6

20. Reduce:

$$L = \frac{\text{sen}x}{1 - \cos x} - \csc x$$

A) cotx B) tanx C) secx
D) secx E) 1

21. Si: $\tan\theta - \cot\theta = 5$

calcula: $S = \tan^4\theta + \cot^4\theta$

A) 625 B) 962 C) 972
D) 727 E) 725

22. Reduce:

$$M = \frac{\text{sen}^3x + \cos^3x}{1 - \text{sen}x\cos x} - \cos x$$

A) 1 B) senx C) 0
D) tanx E) cotx

23. Si: $(\sec\theta\tan\theta)^{-1} = \frac{1}{5}$

calcula: $M = \sqrt{\sec^4\theta + \tan^4\theta - 2}$

A) 7 B) 9 C) 3
D) 4 E) 6

Resolución de problemas

24. Si $\theta \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$, halla el máximo valor que toma la siguiente expresión:

$$k = \frac{(1 + \csc^2\theta)\,\text{sen}\theta}{\sec\theta \,.\, \csc\theta - \text{sen}^2\theta\,\tan\theta}$$

A) 1 B) $\sqrt{3}$ C) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
D) 2 E) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

25. Si $\beta \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right]$, halla el mínimo valor que toma la siguiente expresión:

$$P = \frac{\csc^2\beta - \cos^4\beta\csc^2\beta}{\cot\beta \,.\, \sec\beta + \cos\beta\cot\beta}$$

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$
C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{3}{5}$
E) $\frac{4}{5}$

NIVEL 3

Comunicación matemática

26. Compara las siguientes cantidades:

(M) El valor de k, si $\alpha = \pi/4$:
$\text{sen}^2x \,.\, \cos x + \cos^3x = k\cos x$

(N) El valor de k, si $\alpha = \pi/3$:
$\text{sen}^2x \,.\, \cos x + \cos^3x = k\cos x$

A) M + N = 3 B) M = 2N
C) 3M = N D) 2M + N = 5
E) $\sqrt{2(M + N)} = 2$

27. Dada la siguiente sucesión cuadrática:
$\text{sen}^2\theta$; 1; 2; $3 + \text{sen}^2\theta$; $4 + 3\,\text{sen}^2\theta$...;
halla:

$$A = t_5 + \cos^2\theta - 2\text{sen}^2\theta$$

A) 3 B) 5 C) 7
D) 4 E) 6

Razonamiento y demostración

28. Simplifica:

$$E = \frac{1 - \cos^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} + \frac{1 - \text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

A) tanα B) cotα C) 2tanα
D) 1 E) 2

29. Reduce:

$$M = \left[\frac{\text{sen}^4x - \cos^4x}{\text{sen}^2x - \cos^2x}\right]^4$$

A) 16 B) 1 C) 2
D) $\tan^4x$ E) $\cot^4x$

30. Reduce:

$$L = \frac{\text{sen}^6x + \cos^6x}{1 - 3\text{sen}^2x\cos^2x} + \frac{1 - 2\text{sen}^2x\cos^2x}{\text{sen}^4x + \cos^4x}$$

A) 4 B) 2 C) 6
D) 8 E) cotx

31. Reduce:

$$A = \frac{\text{sen}^3\alpha - \cos^3\alpha}{1 + \text{sen}\alpha\cos\alpha} - \text{sen}\alpha$$

A) cosα B) 1 C) 0
D) –cosα E) 2

32. Reduce:

$$A = \frac{(\csc\alpha + 1)(\csc\alpha - 1)}{\cot^2\alpha} + \frac{(\sec\alpha + 1)(\sec\alpha - 1)}{\tan^2\alpha}$$

A) 1 B) tanα C) 2
D) cotα E) senα

33. Si: $\text{sen}\alpha + \cos\alpha = \frac{2}{3}$

calcula: $M = \sqrt{162(\text{sen}^4\alpha + \cos^4\alpha) + 7}$

A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

34. Reduce:

$$T = \sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta}} - \csc\theta$$

A) tanθ B) 1 C) senθ
D) cosθ E) cotθ

35. Si: $\cos x + \sec x = 3$

calcula: $T = \sqrt[4]{\cos^3x + \sec^3x - 2}$

A) 1 B) 3 C) 4
D) 2 E) 5

Resolución de problemas

36. Sea $A = \sqrt{\tan\alpha + \cot\alpha}$ ∧ $B = \sqrt{\text{sen}\alpha}$.
Si A y B ∈ ℝ, entonces se puede decir respecto a α:

A) $\left[\frac{\pi}{10}; \frac{4\pi}{10}\right]$ B) $\left[\frac{7\pi}{10}; \frac{9\pi}{10}\right]$
C) $\left[\frac{12\pi}{10}; \frac{15\pi}{10}\right\rangle$ D) $\left[\frac{16\pi}{10}; 2\pi\right\rangle$
E) A y C

37. Elimina β a partir de las siguientes ecuaciones:
$\cos\beta(\csc\beta - \text{sen}\beta) = M$ ... (1)
$\text{sen}\beta(\sec\beta - \cos\beta) = N$ ... (2)
Además se cumple: $\frac{M}{N} = k$

A) (M – N)k + MN = 1
B) (M – N)k – MN = 1
C) (M + N)k + 2MN = 1
D) (M + N)k + MN = 1
E) 2(M + N)k + MN = 1

Claves

NIVEL 1	8. C	15. A	23. A	30. B
1. B	9. B	16. D	24. D	31. D
2.	10. A	17. D	25. C	32. C
3. E	11. C	18. B	NIVEL 3	33. E
4. A	12. D	19. C	26. E	34. E
5. A	NIVEL 2	20. A	27. E	35. D
6. A	13. B	21. D	28. E	36. A
7. C	14. E	22. B	29. B	37. C

Aplicamos lo aprendido





TEMA 3: ÁNGULOS COMPUESTOS

1 Halla:

$E = \text{sen}10° + 2\cos20°\cos80°$

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{1}{3}$
D) 4 E) 3

2 Calcula:

$P = \cos80° + 2\text{sen}70° \,.\, \text{sen}10°$

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) -1
D) 3 E) $4\sqrt{2}$

3 Calcula:

$E = \sqrt{3}\cot10°(\tan50° - \tan40°)$

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) -2 C) $\frac{1}{2}$
D) $2\sqrt{3}$ E) $\sqrt{3}$

4 Si: $\tan(\alpha + \beta) = 5$ y $\tan\alpha = 7$

calcula: $\tan\beta$

A) $\frac{1}{18}$ B) $\frac{1}{17}$ C) $-\frac{1}{18}$
D) $-\frac{1}{17}$ E) $-\frac{1}{19}$

5 Simplifica:

$E = \frac{\text{sen}(x+y) - \cos x \,\text{sen} y}{\text{sen}(x-y) + \cos x \,\text{sen} y}$

A) 1 B) tanx C) coty
D) tany E) cotx

6 Determina sen(x + y); si:

$\tan x = \frac{3}{4} \wedge \sec y = \frac{13}{5}$; (x, y ángulos agudos)

A) $\frac{61}{65}$ B) $\frac{62}{65}$ C) $\frac{63}{65}$
D) $\frac{64}{65}$ E) 1

7 Reduce:

$E = \tan 21° + \tan 24° + \tan 21°.\tan 24°$

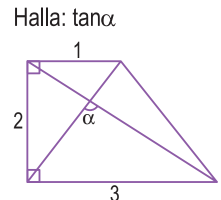
A) 2 B) 4 C) 3
D) 1 E) –2

8 Calcula:

$Q = \tan 34° + \tan 19° + \frac{4}{3}\tan 34° \,.\, \tan 19°$

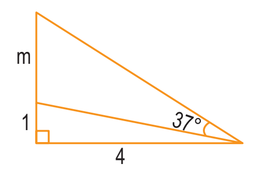
A) 1 B) $\frac{4}{3}$ C) 2
D) $\frac{1}{2}$ E) 3

9 Halla: $\tan\alpha$



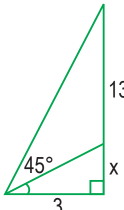
A) 4 B) $\frac{1}{4}$ C) 8
D) $\frac{1}{8}$ E) 6

10 Halla m.



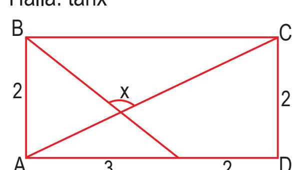
A) $\frac{51}{13}$ B) $\frac{17}{13}$ C) $\frac{13}{17}$
D) $\frac{13}{51}$ E) 3

11 Halla x.



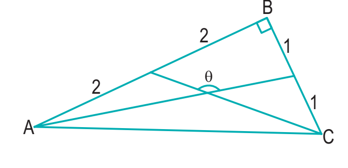
A) 2 B) 1 C) 3
D) 5 E) 4

12 Halla: $\tan x$



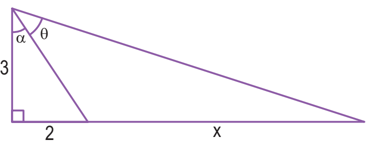
A) 16/11 B) 13/11 C) –16/11
D) 15/11 E) 11/6

13 Calcula $\tan\theta$.



A) 3/5 B) –2/5 C) –1/5
D) –3/5 E) 1

14 Halla x, sabiendo que: $\tan(\theta - \alpha) = 0{,}2$



A) 12 B) 8 C) 9
D) 11 E) 13

Claves

1. A	3. D	5. A	7. D	9. C	11. A	13. D
2. B	4. C	6. C	8. B	10. A	12. C	14. E

Practiquemos

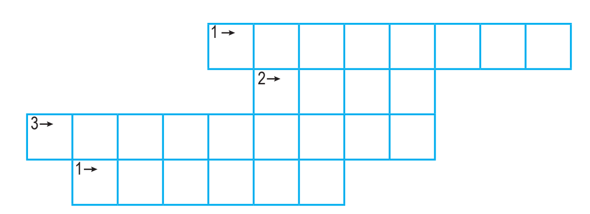


NIVEL 1

Comunicación matemática

1. Crucigrama:
Completa el siguiente crucigrama y descubre el nombre de un matemático.

1. Cateto opuesto entre cateto adyacente.
2. Segunda letra del alfabeto griego.
3. Tipo de ángulo formado por la suma o diferencia de dos o más ángulos simples.
4. Figura geométrica formada por dos líneas que parten de un mismo punto.



2. Completa:

$\cos(\alpha + \beta) =$

$\cos(\alpha - \beta) =$

Razonamiento y demostración

3. Calcula:
$C = \text{sen}17°\cos43° + \text{sen}43°\cos17°$

A) 0,6 B) 0,5 C) 0,8
D) $\sqrt{3}/2$ E) $\sqrt{2}/2$

4. Calcula: $L = \cos42°\cos18° - \text{sen}42°\text{sen}18°$

A) 0,50 B) 0,60 C) 0,70
D) 0,80 E) 0,75

5. Reduce: $C = \text{sen}4x\cos x - \text{sen}x\cos4x$

A) sen3x B) sen5x C) sen2x
D) cos5x E) cos3x

6. Reduce: $C = \cos3x\cos2x + \text{sen}3x\text{sen}2x$

A) senx B) cosx C) sen2x
D) cos2x E) 1

7. Simplifica:

$$C = \frac{\text{sen}(45° + x) + \text{sen}(45° - x)}{\cos x}$$

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
D) $2\sqrt{2}$ E) 2

8. Reduce:

$$C = \frac{\text{sen}(x + \theta)}{\text{sen}x\text{sen}\theta} - \cot\theta$$

A) tanx B) $\tan\theta$ C) cotx
D) $\cot\theta$ E) 1

9. Reduce: $C = \dfrac{\cos(x - \beta) - \text{sen}x\text{sen}\beta}{\cos x\cos\beta}$

A) 1 B) tanx C) $\tan\beta$
D) cotx E) $\cot\beta$

10. Reduce: $L = \dfrac{\text{sen}(\alpha + \theta) - \text{sen}\alpha\cos\theta}{\cos(\alpha + \theta) + \text{sen}\alpha\text{sen}\theta}$

A) $\tan\alpha$ B) $\tan\theta$ C) $\cot\alpha$
D) $\cot\theta$ E) $\tan\alpha \,.\, \tan\theta$

NIVEL 2

Comunicación matemática

11. Indica verdadero a falso según corresponda:

I. $\cos(x + y) = \cos x\cos y + \text{sen}x\text{sen}y$ ( )
II. $\cos(x - y) = \cos x\cos y - \text{sen}x\text{sen}y$ ( )
III. $\cos(x + 2°) = \cos x\cos2° - \text{sen}x\text{sen}2°$ ( )

12. Indica verdadero a falso según corresponda:

I. $\cos(x + 2x) = \cos x\cos2x - 2\text{sen}^2x\cos x$ ( )
II. $\cos(30° + x) = \text{sen}60\cos x - \text{sen}30°\text{sen}x$ ( )
III. $\cos(x - 40°) = \cos x\cos40° + \text{sen}x\cos50°$ ( )

Razonamiento y demostración

13. Siendo θ un ángulo agudo, tal que $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, calcula: $\text{sen}(60° + \theta)$

A) $\frac{2\sqrt{7}}{21}$ B) $\frac{3\sqrt{21}}{7}$ C) $\frac{3\sqrt{21}}{14}$
D) $\frac{2\sqrt{21}}{7}$ E) $\frac{5\sqrt{21}}{14}$

14. Siendo α y β ángulos agudos, tales que:

$\text{sen}\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$ y $\text{sen}\beta = \frac{2}{\sqrt{13}}$

Calcula: $\tan(\alpha + \beta)$

A) 2/9 B) 9/2 C) 7/9
D) 9/7 E) 4/7

15. Determina el valor de:
$C = (\text{sen}\alpha + \text{sen}\beta)^2 + (\cos\alpha + \cos\beta)^2$
si $\alpha - \beta = \frac{\pi}{6}$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) $1 + \sqrt{3}$ E) $2 + \sqrt{3}$

16. Determina el valor de:

$L = (\cos\alpha + \cos\theta)^2 + (\text{sen}\alpha - \text{sen}\theta)^2$

si $\alpha + \theta = 37°$.

A) 2,6 B) 2,8 C) 3,0
D) 3,2 E) 3,6

17. Determina el valor máximo de:

$C = 3\text{sen}x - \sqrt{2}\cos x$:

A) 3 B) 9 C) $\sqrt{7}$
D) $\sqrt{11}$ E) 4

18. Calcula el máximo valor de la expresión:

$3\text{sen}x + 4\cos x + 5$

A) 12 B) 11 C) 10 D) 9 E) 8

19. Determina el máximo valor de:

$L = 5(\text{sen}x - 1) + 12(\cos x + 1)$

A) 13 B) 17 C) 18 D) 20 E) 23

20. Calcula:

$\tan 20° + \tan 25° + \tan 20° \tan 25°$

A) 1 B) 2 C) 3 D) $\sqrt{2}$ E) 1/2

NIVEL 3

Comunicación matemática

21. Completa:

sen6x . (   ) – cos6x(   ) = sen4x
cos5x . (   ) + sen5x . (   ) = cosx

22. Relaciona según corresponda; si α es agudo:

$\text{sen}\alpha\cos 22° + \cos\alpha\,\text{sen}22° = \cos 50°$	$\alpha = 13°$
$\text{sen}\alpha\cos 20° + \cos\alpha\,\text{sen}20° = \text{sen}44°$	$\alpha = 18°$
$\cos 35°\cos\alpha - \text{sen}35°\text{sen}\alpha = \cos - 48°$	$\alpha = 24°$

Razonamiento y demostración

23. Calcula:

$$\frac{\tan 65° - \tan 25°}{\tan 40°}$$

A) 1/3 B) 1/4 C) 1
D) 1/2 E) 2

24. Calcula:

$$\frac{\text{sen}20°}{\text{sen}25° - \cos 25°}$$

A) 1/3 B) $-\sqrt{2}/2$ C) $\sqrt{2}$
D) $\sqrt{2}/4$ E) $2\sqrt{2}$

25. Reduce:

$$\frac{\tan^2 5\alpha - \tan^2 3\alpha}{1 - \tan^2 5\alpha \tan^2 3\alpha}$$

A) $\tan 5\alpha \tan 3\alpha$ B) $\cot 5\alpha \cot 3\alpha$
C) $\tan 25\alpha \tan 23\alpha$ D) $\tan 8\alpha \cot 2\alpha$
E) $\tan 8\alpha \tan 2\alpha$

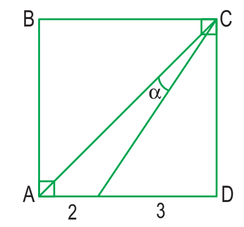
26. Calcula:

$\tan 20° + \tan 40° + \sqrt{3}\tan 20° \tan 40°$

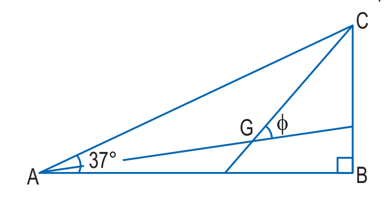
A) 1 B) 2 C) 3 D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{2}$

27. Si ABCD es un cuadrado, calcula: $\tan\alpha$

A) 1/8
B) 1/2
C) 1/3
D) 1/4
E) 1/5



28. Del gráfico, si G es baricentro del ⊿ABC, halla $\tan\phi$.



A) 31/25 B) 18/25 C) 9/25
D) 3/25 E) 1/25

29. En un triángulo ABC: $\tan A + \tan B = 7\tan C$

Calcula: $L = \tan A \tan B$

A) 7 B) 6 C) 8
D) 9 E) 10

30. En un triángulo ABC:

$$\frac{\tan A}{2} = \frac{\tan B}{3} = \frac{\tan C}{4}$$

Calcula: $L = \sqrt{6}\tan A + 3$

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 8

Claves

NIVEL 1			
1.	9. A	16. E	23. E
2.	10. B	17. D	24. B
3. D	NIVEL 2	18. C	25. E
4. A	11.	19. D	26. D
5. A	12.	20. A	27. D
6. B	13. C	NIVEL 3	28. B
7. B	14. D	21.	29. C
8. C	15. E	22.	30. B

Aplicamos lo aprendido





TEMA 4: ÁNGULOS MÚLTIPLES

1 Calcula:

$$N = \frac{(\cos 35° + \text{sen}35°)(\cos 35° - \text{sen}35°)}{4\cos 10°\text{sen}10°}$$

A) 3 B) 1 C) 2
D) 5 E) 0,5

2 Conociendo que: tanx = 3,
calcula: $\tan^2 2x$

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{9}{16}$ C) –36
D) 1 E) $-\frac{16}{9}$

3 Simplifica:

$$E = 2\sqrt{2 - \sqrt{2 + 2\cos 24°}}$$

A) 4sen6° B)8cos6° C)4cos6°
D)8sen6° E)6sen4°

4 Si: $\theta = \frac{\pi}{8}$, calcula:

$$K = \frac{\text{sen}\theta - 2\text{sen}^3\theta}{\sec\theta}$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
D) $\frac{3}{4}$ E) 5

5 Si $\text{sen}\frac{x}{2} = \frac{4}{7}$, halla cosx.

A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{7}{13}$ C) $\frac{17}{49}$
D) $-\frac{13}{7}$ E) $-\frac{7}{4}$

6 Si $\tan\frac{x}{2} = \frac{2}{3}$, halla cosx.

A) –2 B) $\frac{5}{13}$ C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{1}{6}$

7 Si: $\cos x = -\frac{23}{25} \wedge 90° < x < 180°$, halla $\cos\frac{x}{2}$.

A) $\frac{1}{5}$ B) $-\frac{2}{5}$ C) $\frac{23}{25}$
D) $\frac{2}{3}$ E) $-\frac{25}{23}$

8 Halla tan22,5°.

A) 2 B) 1 C) $\sqrt{2}-1$
D) –1 E) $\frac{1}{2}$

9 Calcula:
$y = \tan 159°$

A) $-\frac{44}{117}$ B) $\frac{44}{117}$ C) $\frac{13}{119}$
D) $-\frac{19}{102}$ E) $\frac{7}{19}$

10 Si $\tan x = -\frac{1}{2}$, calcula: tan6x.

A) $\frac{23}{27}$ B) $\frac{44}{117}$ C) $\frac{41}{13}$
D) $\frac{17}{19}$ E) $\frac{13}{97}$

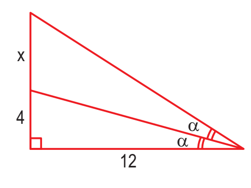
11 Si: $(1+\cos x)^2 + (1-\cos x)^2 = 2$,
calcula: cos6x.

A) 0 B) 1 C) –1
D) $\frac{1}{2}$ E) $-\frac{1}{2}$

12 Calcula:
$C = \frac{\text{sen}8° \,.\, \text{sen}52° \,.\, \text{sen}68°}{\cos 66°}$

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{4}$

13 Halla "x", en:



A) 5 B) 8 C) 7
D) 6 E) 9

14 Halla "θ", si: $\frac{2\cos\theta + 1}{2\cos\theta - 1} = \text{ctg}\frac{\theta}{2}$ y $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$.

A) π/3 B) π/6 C) π/8
D) π/5 E) π/7

Claves

1. E	3. A	5. C	7. A	9. A	11. C	13. A
2. B	4. B	6. B	8. C	10. B	12. E	14. B

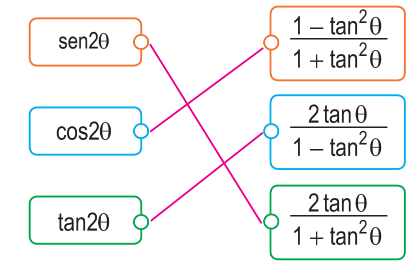
Practiquemos



NIVEL 1

Comunicación matemática

1. Relaciona según corresponda:



2. Marca verdadero (V) o falso (F), según corresponda:

I. $\text{sen}4\theta = 2\text{sen}2\theta \cdot \cos2\theta$ ( )

II. $\text{sen}40 = 2\text{sen}20° \cdot \cos20°$ ( )

III. $2\cos^2 8° = 1 + \cos16°$ ( )

Razonamiento y demostración

3. Reduce:
$A = \text{sen}2x\tan x + 2\cos^2 x$

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) 2
D) sen^2x E) $\cos^2x$

4. Simplifica:
$R = \text{sen}\theta\cos\theta\cos2\theta$

A) $\frac{\text{sen}2\theta}{2}$ B) $\frac{\text{sen}4\theta}{4}$
C) $\frac{\text{sen}8\theta}{8}$ D) $\frac{\text{sen}4\theta}{2}$
E) $\frac{\text{sen}8\theta}{2}$

5. Si $\text{sen}\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, calcula: $\cos2\theta$

A) 2/5 B) 3/5 C) 4/5
D) –3/5 E) –4/5

6. Si $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, calcula: $\cos2\theta$

A) –1/3 B) 1/3 C)2/3
D) –2/3 E) $\frac{\sqrt{3}}{8}$

7. Si $\tan\theta = \frac{1}{2}$, calcula: $\tan2\theta$

A) 1/3 B) 2/3 C) 4/3
D) 5/3 E) 7/3

8. Simplifica:
$M = (\sec x - \cos x)(\csc x - \text{sen}x)$

A) $\frac{1}{2}\cos2x$ B) $\frac{1}{4}\cos4x$ C) $\cos2x$
D) $\frac{1}{2}\text{sen}2x$ E) $\frac{1}{2}\text{sen}\frac{x}{2}$

9. Si: $\cos\frac{x}{2} = -\frac{1}{5}$, halla cosx.

A) $\frac{23}{25}$ B) $-\frac{23}{25}$ C) $\frac{21}{25}$
D) $-\frac{21}{25}$ E) $-\frac{1}{25}$

10. Si $\tan\frac{x}{2} = \frac{1}{3}$, halla cosx.

A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $-\frac{4}{5}$
D) $-\frac{3}{5}$ E) $-\frac{1}{2}$

11. Si $\tan\frac{x}{2} = -2$, halla cosx.

A) $\frac{3}{5}$ B) $-\frac{3}{5}$ C) $\frac{4}{5}$
D) $-\frac{4}{5}$ E) $-\frac{2}{5}$

12. ¿A qué es igual
$E = \sec40° - \tan40°$?

A) tan25° B) cot25° C) tan50°
D) cot50° E) tan80°

13. Calcula: $E = \tan22°30'$

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}+1$
C) $\sqrt{2}-1$ D) $\frac{\sqrt{2}+1}{8}$
E) $\sqrt{2}+1$

14. Calcula: $E = \tan\frac{\pi}{8} - \cot\frac{\pi}{8}$

A) –2 B) 2 C) $2\sqrt{2}$
D) $-2\sqrt{2}$ E) 0

15. El valor de:
$E = \cos80° \cdot \cos20° \cdot \cos40°$ es:

A) 2 B) $\frac{3}{4}$ C) 4
D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{8}$

16. Al simplificar la expresión:
$E = \text{sen}6° \cdot \text{sen}54° \cdot \text{sen}66°$
Obtenemos:

A) sen12° B) 2sen6° C) sen18°
D) 2sen12° E) $\frac{\text{sen}18°}{4}$

17. Reduce: $C = (\cos3x + 2\cos x)\tan x$

A) sen3x . cosx B) tan3x
C) sen3x D) cos3x . senx
E) cot3x

18. Halla: sen111°

A) $\frac{8}{125}$ B) $\frac{108}{125}$ C) $\frac{117}{125}$
D) $\frac{107}{125}$ E) $\frac{9}{125}$

19. Reduce: $A = \frac{\text{sen}3x}{\text{sen}x} - \frac{\cos3x}{\cos x}$

A) cosx B) sen2x C) sen4x
D) 4cos2x E) 2

20. Siendo: $\text{sen}\theta = \frac{1}{3}$, calcula: $L = \frac{\cos3\theta}{\cos\theta}$

A) $\frac{11}{3}$ B) $\frac{7}{2}$ C) $-\frac{11}{3}$
D) 2 E) $\frac{5}{9}$

Resolución de problemas

21. Si la tangente de un ángulo agudo es 2/3, ¿cuál es la tangente del doble de dicho ángulo?

A) 2/5 B) 9/5 C) 12/5
D) 7/5 E) 6/5

22. Si la cotangente de un ángulo es 2, ¿cuál es la tangente del doble de dicho ángulo?

A) 2/3 B) 2/5 C) 1/2
D) 1/4 E) 4/3

NIVEL 2

Comunicación matemática

23. Relacione según corresponda:

$\cos\frac{\theta}{2}$ $\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$

$\tan\frac{\theta}{2}$ $\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$

$\cot\frac{\theta}{2}$ $\csc\theta + \cot\theta$

24. Indica verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

I. $\cos120° = -\sqrt{\frac{1+\cos240}{2}}$ ( )

II. $\cot60° = \csc120° + \cot120°$ ( )

III. $\tan10° = \sqrt{\frac{1-\cos20°}{1+\cos20°}}$ ( )

Razonamiento y demostración

25. Si: senxcosxcos2xcos4x = m, halla: sen8x

A) m B) 2m C) 4m
D) 8m E) 16m

26. Reduce: $0° < x < 90°$

$M = \sqrt{1+\text{sen}2x} - \text{senx}$

A) senx B) cosx C) 2senx
D) 2cosx E) tanx

27. Simplifica:

$A = 2(\cos^4x - \text{sen}^4x)^2 - 1$

A) cosx B) cos2x C) cos4x
D) sen4x E) –cos2x

28. Calcula:

$M = \cos^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8}$

A) 0,5 B) 0,75 C) 0,25
D) 0,35 E) 0,6

29. Reduce:

$A = \dfrac{\text{sen}^3x - \cos^3x}{\text{senx} - \cos x} - 1$

A) sen2x B) cos2x C) senx
D) $\frac{1}{2}$sen2x E) $\frac{1}{2}\cos 2x$

30. Si: tanx + cotx = n, ¿a qué es igual sen2x?

A) 2/n B) n/2 C) 2n
D) 1/2n E) 1/n

31. Simplifica:

$E = \left(\cot\frac{x}{2} + \tan\frac{x}{2}\right)(\csc 2x - \cot 2x)$

A) 2senx B) cosx C) 2cosx
D) secx E) 2secx

32. Simplifica:

$E = \dfrac{\cot\frac{x}{2} - \tan\frac{x}{2}}{\csc 2x + \cot 2x}$

A) –2 B) $\frac{1}{2}$ C) 1
D) 2 E) –1

33. Si: $\text{sen}\frac{x}{2} = \frac{3}{4}$, halla cosx.

A) $-\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $-\frac{1}{4}$
D) $\frac{1}{4}$ E) $-\frac{1}{16}$

34. ¿A qué es igual $E = \sqrt{\dfrac{1-\cos 100°}{2}}$?

A) cos50° B) –cos50° C) sen50°
D) –sen50° E) sen200°

35. ¿A qué es igual $E = \sqrt{\dfrac{1+\cos 80°}{2}}$?

A) –cos40° B) cos40°
C) –2cos40° D) 2cos40°
E) sen40°

36. Si: $\cos x = -\frac{3}{4} \wedge 180° < x < 270°$, halla: $\tan\frac{x}{2}$

A) $-\frac{1}{\sqrt{7}}$ B) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ C) $\sqrt{7}$
D) $-\sqrt{7}$ E) $-2\sqrt{7}$

37. Simplifica:

$\tan3\theta(2\cos2\theta - 1) - (2\cos2\theta + 1)\tan\theta$

A) tanθ B) cotθ C) 0
D) tan3θ E) cot3θ

38. Calcula:

$\sec\frac{2\pi}{9} + 8\cos^2\frac{2\pi}{9}$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 5 E) 6

39. Siendo: $\cot\theta = 2\sqrt{2}$; θ agudo, calcula: sen3θ

A) $\frac{7}{9}$ B) $-\frac{7}{9}$ C) $\frac{23}{27}$
D) $-\frac{23}{27}$ E) $\frac{17}{27}$

40. Si: sen3x = 0,25senx, calcula: $K = 5\tan^2x + 1$

A) 2 B) 4 C) 6
D) 8 E) 12

41. Si: tan3x = 5tanx, calcula: |tan2x|

A) $\sqrt{7}$ B) $\sqrt{14}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{5}$
D) $\frac{\sqrt{7}}{3}$ E) $\sqrt{5}$

42. Sea: $4\cos18° - \dfrac{3}{\cos18°} = k\tan18°$. Halla el valor de k.

A) 2 B) 3 C) $\sqrt{3}$
D) 7 E) $\sqrt{7}$

Resolución de problemas

43. Si el seno de un ángulo agudo es 1/2, ¿cuál es el seno de la mitad de dicho ángulo?

A) $\sqrt{\sqrt{2}-1}$ B) $\sqrt{1+\sqrt{2}}$
C) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ D) $\sqrt{1-\sqrt{3}}$
E) $\frac{1}{2}.\sqrt{2-\sqrt{3}}$

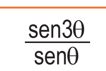
44. Si la secante de un ángulo agudo es 3, ¿cuál es el coseno de la mitad de dicho ángulo?

A) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ B) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{3}$
D) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{5}$

NIVEL 3

Comunicación matemática

45. Relaciona según corresponda:



$\frac{2\cos2\theta+1}{2\cos2\theta-1}$

$\frac{\cos3\theta}{\cos\theta}$



$\frac{\tan3\theta}{\tan\theta}$

$2\cos2\theta-1$

46. Indica verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

I. $\dfrac{\text{sen}30°}{\text{sen}10°} = 2\cos20° - 1$ ( )

II. $\dfrac{\cos60°}{\cos20°} = 2\cos40° - 1$ ( )

III. $\dfrac{\tan75°}{\tan25°} = \dfrac{2\cos50°+1}{2\cos50°-1}$ ( )

Razonamiento y demostración

47. Simplifica:

$E = \tan\theta + 2\tan2\theta + 4\tan4\theta + 8\cot8\theta$

A) tanθ B) cotθ C) 2tanθ
D) 2cotθ E) csc2θ

48. Simplifica:

$Q = (1+\sec2\theta)(1+\sec4\theta)(1+\sec8\theta)(1+\sec16\theta)$

A) $\frac{\tan8\theta}{\tan\theta}$ B) $\frac{\tan16\theta}{\tan\theta}$
C) $\frac{\tan4\theta}{\tan\theta}$ D) $\frac{\tan16\theta}{\tan2\theta}$
E) $\frac{\tan8\theta}{\tan4\theta}$

49. Si $\text{sen}\theta = \frac{7}{25} \wedge 90° < \theta < 180°$, calcula: sen2θ

A) $\frac{336}{625}$ B) $\frac{236}{625}$ C) $-\frac{236}{625}$
D) $-\frac{336}{625}$ E) $-\frac{436}{625}$

50. Simplifica:

$$K = \tan\frac{x}{2} + 2\text{sen}^2\frac{x}{2}\cot x$$

A) cosx B) tanx C) cotx
D) senx E) 1

51. Dado un triángulo rectángulo BAC, recto en A; calcula $\tan\frac{C}{2}$ en función de los lados a, b y c.

A) $\frac{b+c-a}{b-c+a}$ B) $\frac{a+b-c}{a+b+c}$
C) $\frac{a+b-c}{a-b+c}$ D) $\frac{b+c-a}{c+a-b}$
E) $\frac{a+b+c}{abc}$

52. Calcula la suma de los n primeros términos de la serie:

$$\tan x + \frac{1}{2}\tan\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\tan\frac{x}{4} + ... + \frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$$

A) $\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n} - 2\cot x$
B) $\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n} - 2\tan 2x$
C) $\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n} - \tan 2x$
D) $\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n} - 2\cot 2x$
E) $\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n} - 2\tan 2x$

53. Reduce:

$$E = \csc 10° + \csc 20° + \csc 40° + \csc 80° + \cot 80°$$

A) cot5° B) tan5° C) cot10°
D) tan10° E) csc5°

54. ¿A qué es igual $E = \sec x + \tan x$?

A) $\tan\left(45° - \frac{x}{2}\right)$ B) $\cot\left(45° - \frac{x}{2}\right)$
C) $\tan(45° - x)$ D) $\cot(45° - x)$
E) $\tan\left(45° - \frac{x}{4}\right)$

55. ¿A qué es igual

$$E = \sqrt{\frac{1-\cos 200°}{1+\cos 200°}}?$$

A) –tan100° B) tan100° C) tan400°
D) –tan400° E) 1

56. ¿A qué es igual

$$E = \sqrt{\frac{1-\cos 400°}{1+\cos 400°}}?$$

A) –tan200° B) tan200° C) tan400°
D) –tan400° E) 1

57. Si: $\text{sen}\theta = \frac{a-b}{a+b}$, halla:

$$E = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$$

A) $\pm\sqrt{\frac{a}{b}}$ B) $\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$
C) $\pm\sqrt{ab}$ D) $\pm\frac{1}{\sqrt{ab}}$
E) $\pm\sqrt{a+b}$

58. Si: $\text{sen}\theta = \frac{m-n}{m+n}$, halla:

$$E = \tan\left(45° + \frac{\theta}{2}\right)$$

A) $\pm\sqrt{\frac{m}{n}}$ B) $\pm\sqrt{\frac{n}{m}}$ C) $\pm\sqrt{mn}$
D) $\pm\frac{1}{\sqrt{mn}}$ E) $\pm\sqrt{m+n}$

59. Calcula el valor de:

$$\frac{\text{sen}3\theta \cdot \cos^2\theta \cdot \text{sen}\theta - \cos 3\theta \cdot \text{sen}^2\theta \cdot \cos\theta}{(\text{sen}\theta \cdot \cos\theta)^2}$$

A) 1 B) –1 C) 2
D) –2 E) $\frac{1}{2}$

60. Calcula el valor de $\tan 3\alpha$, si se cumple que:

$$2\tan^3\alpha = 3\tan^2\alpha + 6\tan\alpha - 1.$$

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{4}{7}$
D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{7}{3}$

61. Si: $\tan\alpha = \frac{1}{3}$, halla: $F = \frac{3\tan 3\alpha - \tan\alpha}{3\tan\alpha - \tan 3\alpha}$

A) –10 B) –9 C) 4
D) –8 E) –2

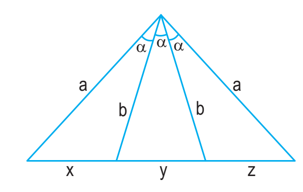
62. Sabiendo que: $\cot\alpha = -2\sqrt{2}$; $\alpha \in$ IIC; calcula $C = \text{sen}3\alpha \cdot \sec\alpha$

A) $\frac{17\sqrt{2}}{36}$ B) $-\frac{17\sqrt{2}}{36}$
C) $\frac{23\sqrt{2}}{36}$ D) $-\frac{23\sqrt{2}}{36}$
E) $-\frac{7\sqrt{2}}{36}$

63. Halla: sen18°

A) $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ B) $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$
C) $\frac{3+\sqrt{5}}{4}$ D) $\frac{\sqrt{3}-2}{4}$
E) $\frac{\sqrt{3}+2}{7}$

64. En el triángulo de la figura, halla el ángulo α, para que **a** sea el doble de **b**.



A) $\arccos\frac{3}{2}$ B) $\arccos\frac{2}{3}$
C) $\arccos\frac{1}{4}$ D) $\arccos\frac{1}{2}$
E) $\arccos\frac{3}{4}$

Resolución de problemas

65. Si la cotangente de un ángulo agudo es 1/2, ¿cuál es el coseno del doble de dicho ángulo?

A) –6/7 B) –3/5 C) –8/5
D) –2/3 E) –1/5

66. Si la cotangente de un ángulo agudo es 1/2, ¿cuál es la tangente del triple de dicho ángulo?

A) 2/3 B) 3/8 C) 4/11
D) 2/11 E) 3/5



Claves

NIVEL 1		NIVEL 2		NIVEL 3	
1.	12. A	23.	33. A	45.	55. A
2.	13. C	24.	34. C	46.	56. B
3. C	14. A	25. D	35. B	47. B	57. B
4. B	15. E	26. B	36. D	48. B	58. A
5. D	16. E	27. C	37. C	49. D	59. C
6. A	17. C	28. B	38. E	50. D	60. D
7. C	18. C	29. D	39. C	51. A	61. B
8. D	19. E	30. A	40. E	52. D	62. D
9. B	20. E	31. E	41. D	53. A	63. A
10. A	21. C	32. D	42. A	54. B	64. E
11. B	22. E		43. E		65. B
			44. B		66. D

Aplicamos lo aprendido



TEMA 5: TRANSFORMACIONES TRIGONOMÉTRICAS

1 Simplifica:

$A = 2sen3x \,.\, cosx - sen2x$

A) senx B) sen2x C) sen3x
D) sen4x E) sen5x

2 Reduce:

$B = sen15° \,.\, cos5° + cos25° \,.\, sen15°$

A) cos10° B) cos20° C) $\frac{cos\,10°}{2}$
D) $\frac{cos\,20°}{2}$ E) cos40°

3 Calcula:

$R = cos40° + cos80° + cos160°$

A) 1 B) –1 C) 0
D) 2 E) –2

4 Efectúa:

$A = 2sen7x \,.\, cos2x - sen5x$, para: $x = \frac{\pi}{18}$

A) –1 B) 1 C) $\frac{1}{2}$
D) $-\frac{1}{2}$ E) 0

5 En un $\triangle ABC$, calcula:

$M = \frac{cos\,2A + cos\,2B}{cos\,C}$

si: $A - B = 60°$

A) $-\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$
D) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ E) –1

6 Reduce:

$L = \frac{sen10° + sen30° + sen50°}{cos\,10° + cos\,30° + cos\,50°}$

A) 1 B) $\frac{1}{3}$ C) 3
D) $\sqrt{3}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

7 Simplifica:

$$H = \frac{1 - \cos 2x + \cos 4x - \cos 6x}{\text{sen}2x - \text{sen}4x + \text{sen}6x}$$

A) tan6x B) tan5x C) tan4x
D) tan3x E) tan2x

8 Reduce:

$$R = \frac{\cos 3A + \text{sen}5A\ .\ \text{sen}A - \cos 7A}{\text{sen}7A + \cos 5A\ .\ \text{sen}A - \text{sen}3A}$$

A) tan5A B) cot5A C) tan3A
D) cot3A E) sen5A

9 Si: $x + y = 15°$,
calcula:

$$M = \frac{\text{sen}(2x + 30°) + \text{sen}(2y + 30°)}{\cos(2x + 45°) + \cos(2y + 45°)}$$

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$
D) 2 E) 4

10 Calcula:
$R = \csc 10° - 4\text{sen}70°$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 5

11 Si $x + y = 30°$, señala el valor máximo de:
$C = \cos 2x + \cos 2y$

A) 1 B) 2 C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\sqrt{3}$

12 Si: $\text{sen}A + \text{sen}B = x$
$\cos A + \cos B = y$
Calcula: $\text{sen}(A + B)$

A) 2xy B) $\frac{xy}{x^2y}$ C) $\frac{2x}{x^2 + y^2}$
D) $\frac{2xy}{x^2 + y^2}$ E) $\frac{3xy}{x^2 + y^2}$

13 En un triángulo ABC, reduce:

$$L = \frac{\text{sen}A - \text{sen}C}{\text{sen}\left(\frac{A - C}{2}\right)}\ .\ \cos\frac{B}{2}$$

A) senB B) 2senB C) $\frac{1}{2}$senB
D) cosB E) 2cosB

14 Reduce:

$$C = \frac{\cos 5x + \cos 3x}{\text{sen}5x + \text{sen}3x}$$

A) cotx B) tan4x C) –cot4x
D) tan2x E) sen4x

Claves

1. D	3. C	5. E	7. D	9. B	11. E	13. A
2. C	4. B	6. E	8. A	10. C	12. D	14. C

Practiquemos



NIVEL 1

Comunicación matemática

1. Transforma a producto las siguientes expresiones trigonométricas:

- $\cos 95° - \cos 15° =$ ______
- $\cos 70° - \cos 80° =$ ______
- $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{7} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} =$ ______
- $\cos 50° + \cos 18° =$ ______
- $\operatorname{sen} 20° + \cos 40° =$ ______
- $\cos 50° + \cos 20° =$ ______

2. Transforma a suma o diferencia las siguientes expresiones trigonométricas:

- $2\operatorname{sen}8x \cdot \cos x =$ ______
- $2\operatorname{sen}10\alpha \cdot \operatorname{sen}2\alpha =$ ______
- $\operatorname{sen}3\theta \cdot \cos 5\theta =$ ______
- $\cos 8\beta \cdot \operatorname{sen}5\beta =$ ______
- $2\cos 70° \cdot \cos 25° =$ ______
- $\operatorname{sen}\frac{\pi}{8} \cdot \cos\frac{\pi}{12} =$ ______

Razonamiento y demostración

3. Transforma a producto:

$C = \operatorname{sen}20° + \operatorname{sen}24° + \operatorname{sen}28° + \operatorname{sen}32°$

A) $2\cos 26° \cdot \cos 4° \cdot \cos 2°$
B) $4\cos 26° \cdot \cos 4° \cdot \cos 2°$
C) $2\operatorname{sen}26° \cdot \cos 4° \cdot \cos 2°$
D) $4\operatorname{sen}26° \cdot \cos 4° \cdot \cos 2°$
E) $4\operatorname{sen}26° \cdot \operatorname{sen}4° \cdot \cos 2°$

4. En un triángulo ABC, se cumple que: $\operatorname{sen}^2A + \operatorname{sen}^2B + \operatorname{sen}^2C = m + n\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$

Calcula $m^2 + n^2$.

A) 1 B) 8 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{4}$ E) 3

5. Sabiendo que:

$(\sec\theta + \sec 3\theta)(\csc\theta - \csc 3\theta) = \dfrac{m\cos^2 n\theta}{\operatorname{sen}p\theta}$

donde m, n, p $>$ 0, calcula $C = (m + n)\,p$.

A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 60

6. Reduce:

$C = \dfrac{\operatorname{sen}14° + 2\operatorname{sen}18° + \operatorname{sen}22°}{\cos^2 2°}$

A) 1 B) $\sqrt{5}$ C) $\sqrt{5}+1$
D) $\sqrt{5}-1$ E) $2\sqrt{5}+1$

7. Simplifica

$C = \dfrac{\operatorname{sen}48° + \operatorname{sen}58°}{\operatorname{sen}85°}$

A) 0,2 B) 0,6 C) 0,8 D) 1,2 E) 1,6

8. Reduce: $C = \dfrac{\cos 5x + \cos 3x}{\operatorname{sen}5x + \operatorname{sen}3x}$

A) cotx B) tanx C) cot4x
D) tan4x E) cot2x

9. Efectúa: $L = \dfrac{\cos 12° - \cos 72°}{\operatorname{sen}72° + \operatorname{sen}12°}$

A) 1 B) $\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{3}$
D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

10. Reduce la expresión:

$E = \operatorname{sen}7x \cdot \operatorname{sen}2x - \operatorname{sen}6x \cdot \operatorname{sen}3x + \cos 6x \cdot \cos 3x$

A) sen7x B) cos7x
C) cos7x . cos2x D) sen7x . cos2x
E) cos2x

11. Sabiendo que $(\cos 14\theta - \cos 16\theta)$ es divisible por $\left(\cos 10\theta + \frac{1}{2}\right)$; halla dicho cociente.

A) $4\cos\theta \cdot \cos 5\theta$ B) $2\operatorname{sen}\theta \cdot \operatorname{sen}5\theta$
C) $4\operatorname{sen}\theta \cdot \operatorname{sen}5\theta$ D) $5\cos\theta \cdot \cos 5\theta$
E) $3\operatorname{sen}\theta \cdot \operatorname{sen}5\theta$

Resolución de problemas

12. Se tiene una serie, tal que:

$t_1 = \operatorname{sen}\beta \cdot \sec 3\beta$
$t_2 = \operatorname{sen}3\beta \cdot \sec 9\beta$
$t_3 = \operatorname{sen}9\beta \cdot \sec 27\beta$
$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

Halla la suma de los (n + 1) primeros términos:

A) $\frac{1}{2}(\tan 3^{n+1}\beta + \tan 3^n\beta)$
B) $\frac{1}{2}(\tan 3\beta - \tan 3^n\beta)$
C) $\frac{1}{2}(\tan 3^{n+1}\beta - \tan\beta)$
D) $\frac{1}{2}(\tan\beta - \tan 3^{n+1}\beta)$
E) 0

13. De las siguientes ecuaciones:

$\operatorname{sen}5\alpha + \operatorname{sen}3\alpha = a$ ... (1)
$\cos 3\alpha - \cos 5\alpha = b$ ... (2)

halla una relación entre a y b.

A) $(a^2 + b^2)^2 = 16a^2b^2(a^2 - b^2)^4$
B) $(a^2 + b^2)^4 = 32a^2b^2(a^2 - b^2)$
C) $64a^2b^2(a^2 - b^2)^2 = (a^2 + b^2)^5$
D) $8a^2b^2 = (a^2 + b^2)^5$
E) $a^2b^2 = 64(a^2 + b^2)$

NIVEL 2

Comunicación matemática

14. Sean A; B y C los ángulos de un triángulo. Completa las siguientes identidades trigonométricas:

- $\cos^2A + \cos^2B + \cos^2C$
  $= 1 - 2$ ______
- $\operatorname{sen}^2\frac{A}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{B}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{C}{2}$
  $= 1 +$ ______
- $\cos 2A + \cos 2B - \cos 2C$
  $= -4\operatorname{sen}A \cdot \operatorname{sen}B \cdot \operatorname{sen}C +$ ______
- $\operatorname{sen}2A + \operatorname{sen}2B + \operatorname{sen}2C = 4 \times$ ______
- Si: $A = 90°$

  $\tan B = \dfrac{\cos(B - C)}{\text{______} + \sec(C - B)}$

15. Completa (V) verdadero o (F) falso según corresponda:

- $\operatorname{sen}(a + b + c) + \operatorname{sen}(a + b - c) = 2\operatorname{sen}(a + c)\cos b$ ( )
- Si A; B y C son ángulos de un triángulo y B = C:
  $\Rightarrow 2\operatorname{sen}B \cdot \operatorname{sen}C = \operatorname{sen}A \cdot \cot\frac{A}{2}$ ( )
- Si:
  $S = \underbrace{\cos^2\theta + \cos^2 2\theta + \cos^2 3\theta + ...}_{\text{"n" términos}}$

  $\Rightarrow S = \dfrac{n}{2} + \dfrac{\operatorname{sen}(n\theta) \cdot \cos(n+1)\theta}{2\operatorname{sen}\theta}$ ( )

A) VVF B) FFV C) VFV
D) FVV E) VVV

Razonamiento y demostración

16. Transforma a producto:

$E = \sqrt{1 + \cos\frac{\alpha}{2}} + \sqrt{2} + \sqrt{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{4}$;

siendo $\alpha \in \langle 0; 2\pi\rangle$

A) $4\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{8}\right)$
B) $4\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{8}\right)\cos\frac{\alpha}{4}$
C) $4\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{8}\right)\cos\frac{\alpha}{8}$
D) $4\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{4}\right)\cos\frac{\alpha}{8}$
E) $4\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\cos\alpha$

17. Si: $\beta = \frac{\pi}{40}$, determina el valor de:

$$P = \frac{\text{sen}6\beta - \text{sen}2\beta}{\cos 2\beta - \cos 6\beta} + \frac{\text{sen}14\beta - \text{sen}10\beta}{\cos 14\beta + \cos 10\beta}$$

Considera: $\text{sen}18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

A) $\sqrt{5}+2$ B) $\sqrt{5}$ C) $\sqrt{5}-1$
D) $\sqrt{5}-2$ E) $\sqrt{5}+1$

18. Halla 2x + 4y, si x e y son agudos y complementarios; además:
$\sqrt{2}\,\text{sen}(x - y) = \text{sen}38° + \text{sen}22° + \text{sen}8°$

A) 504° B) 213° C) 217°
D) 206° E) 310°

19. Si: $\frac{\cos 21°(\cos 21° + \cos 147°)}{\cos 69°(\cos 21° - \cos 147°)} = \cot x \, . \, \cot 3x \, . \, \cot 4x$

halla x.

A) 16° B) 69° C) 21°
D) 37° E) 45°

20. Determina θ, si es agudo y además:
$\tan 60° . \text{sen}\theta = \text{sen}35° + \text{sen}25° + \cos 55°$

A) 62° B) 73° C) 58°
D) 65° E) 54°

21. Transforma a producto:
$\text{sen}22° + \frac{\sqrt{2}}{5}\,\text{sen}14° - \text{sen}6°$

A) $\frac{3}{5}\text{sen}31°$ B) $\frac{4}{5}\cos 31°$
C) $\frac{2}{5}\cos 62°$ D) $\frac{2}{5}\cos 31°$
E) $\frac{5}{2}\text{sen}59°$

22. Calcula el valor de:

$$A = \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$
D) $-\frac{1}{4}$ E) $-\frac{1}{2}$

Resolución de problemas

23. Factoriza la siguiente expresión: cos(x + a) . cos(x + b) = L, si se cumple que: sen(x + a) . sen(x + b) = cos(a – b)

A) sen(x + a) B) 0 C) 1
D) cos(x – b) E) sen2x

24. Reduce la siguiente expresión en términos de $\frac{\alpha}{2}$:
$P = \text{sen}\frac{3\alpha}{2}\text{sen}\frac{\alpha}{2} + \cos^2\alpha$

A) $\text{sen}\frac{\alpha}{2}$ B) $\text{sen}^2\frac{\alpha}{2} + 1$ C) $\cos^2\frac{\alpha}{2}$
D) $\cos\frac{\alpha}{2}$ E) $\tan\frac{\alpha}{2}$

NIVEL 3

Comunicación matemática

25. De las siguientes expresiones:
I. El máximo valor de: sen(2x + 10°) . sen(20° – 2x) es: $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}$
II. 2sen(3x + y)sen(3x – y) – 2sen(x + y) . sen(x – y) es igual a 2sen4x . cos4x
III. $(\cos 3x - \text{sen}4x)^2 = (1 - \text{sen}7x)(1 - \text{sen}x)$
IV. cos20° + cos100° + cos140° = 1

¿Cuántas son falsas?

A) 0 B) 1 C) 3 D) 4 E) 2

Razonamiento y demostración

26. En un triángulo ABC, simplifica:

$$N = \frac{\text{sen}A + \text{sen}B - \text{sen}C}{\text{sen}\frac{A}{2}\text{sen}\frac{B}{2}\text{sen}\frac{C}{2}}$$

A) $4\cot\frac{B}{2}$ B) $4\cot\frac{A}{2}$ C) $4\cot\frac{B}{3}$
D) $4\cot\frac{C}{3}$ E) $4\cot\frac{C}{2}$

27. Reduce la expresión siguiente:

$$N = \frac{\cos 3\alpha + \sqrt{103}\cos 2\alpha + \cos\alpha}{\text{sen}3\alpha + \sqrt{103}\,\text{sen}2\alpha + \text{sen}\alpha}$$

A) $\tan 2\alpha$ B) $\cos 2\alpha$ C) $\sec 2\alpha$
D) $\csc 2\alpha$ E) $\cot 2\alpha$

28. Si $3\text{sen}x = \text{sen}(x + 2\theta)$, halla: $\frac{\tan(x+\theta)}{\tan(\theta)}$

A) 2 B) $\frac{1}{2}$ C) 1
D) 3 E) $\frac{1}{3}$

29. Si $2\cos x = \cos(x + 2\theta)$, halla $\cot(x + \theta)\cot\theta$.

A) –3 B) 3 C) 1
D) –2 E) 2

30. Calcula A + B + C, si:

$$\frac{\text{sen}\theta - \text{sen}2\theta + \text{sen}3\theta + \text{sen}4\theta}{\text{sen}2\theta} = A + B\cos\theta + C\cos 2\theta$$

A) –1 B) 1 C) –2 D) 2 E) 3

31. En un triángulo ABC, reduce:

$$L = \frac{\text{sen}2A + \text{sen}2B + \text{sen}2C}{\text{sen}2A - \text{sen}2B + \text{sen}2C}$$

A) tanB B) cotB
C) tanA . tanC D) cotA . cotC
E) –cotB

32. Transforma a producto:
L = cos4x + cos8x + cos12x + cos16x

A) 2cos10x . cos4x . cos2x
B) 4cos10x . cos4x . cos2x
C) 2cos10x . cos4x . sen2x
D) 4cos10x . cos4x . sen2x
E) 4sen10x . cos4x . sen2x

Resolución de problemas

33. Dada la siguiente condición:
$\text{sen}^2\alpha + \cos^2(x - \alpha) + \text{sen}^2(x + \alpha) = 2$,
halla el valor de sen2x en términos de α.

A) $\frac{1}{2}\cot\alpha$ B) $\frac{1}{2}\tan\alpha$ C) $\frac{1}{2}\cot 2\alpha$
D) $\frac{1}{2}\tan 2\alpha$ E) $\text{sen}2\alpha$

34. Calcula la suma de:
$\text{sen}^2\frac{\pi}{9} + \text{sen}^2\frac{2\pi}{9} + \text{sen}^2\frac{4\pi}{9}$

A) 1 B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{3}{2}$ E) 2



Claves

NIVEL 1
1.
2.
3. D
4. B
5. E
6. D
7. E
8. C
9. E
10. C
11. C
12. C
13. C

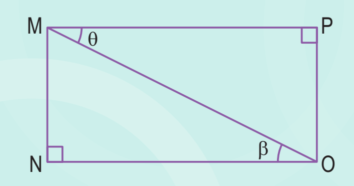
NIVEL 2
14.
15. E
16. C
17. E
18. C
19. C
20. D
21. D
22. E
23. B
24. C

NIVEL 3
25. E
26. E
27. E
28. A
29. A
30. E
31. C
32. B
33. A
34. D

MARATÓN Matemática

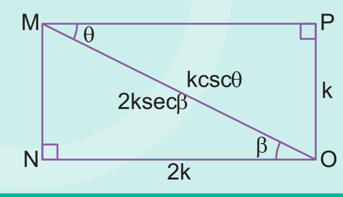
Del siguiente gráfico, calcula: $R = 1 + 4\cos^2\theta + \cos^2\beta$.

Si (NO) = 2(PO).



Resolución:

En el gráfico, tenemos:



Del gráfico tenemos:

$MO = k\csc\theta = 2k\sec\beta$

$\cos\beta = 2\text{sen}\theta$

Nos piden:

$R = 1 + 4\cos^2\theta + \cos^2\beta$

$R = 1 + 4\cos^2\theta + (2\text{sen}\theta)^2$

$R = 1 + 4(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta) = 1 + 4$

$\therefore\ R = 5$



1. De la siguiente identidad:

$$\frac{k + \cos\alpha}{\text{sen}\alpha} = \frac{\text{sen}\alpha}{1 - \cos\alpha}$$

Calcula el valor de "k".

A) 1　B) 1/2　C) –1
D) $\text{sen}\alpha$　E) $\cos\alpha$

2. Si: $\cot\beta + \tan\beta = k$

Calcula $(\text{sen}\beta + \cos\beta)^2$ en términos de k.

A) $\frac{k}{k+1}$　B) $\frac{k+1}{k}$　C) $\frac{k}{k+2}$
D) $\frac{k-1}{k}$　E) $\frac{k+2}{k}$

3. Calcula el valor de:

$M = \cot 40° + \sqrt{3}\tan 10° \cot 40° + \tan 10°$

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　B) $\sqrt{3}$　C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
D) $2\sqrt{3}$　E) 3

4. Si:

$$\underbrace{\frac{\tan 2x}{\tan x} - \frac{\tan^2 2x}{\tan 2x} - \frac{\tan^3 2x}{\tan^2 2x} = \ldots}_{\text{"10" términos}} = k$$

Halla:

$$\underbrace{\tan 2x\tan x - \tan^2 2x \,.\, \tan 2x - \tan^3 2x \,.\, \tan^2 2x \ldots}_{\text{"10" términos}}$$

A) k + 8　B) 8 – k　C) k + 16
D) 16 – k　E) 8 + 2k

5. Simplifica:

$$k = \frac{\text{sen}3\alpha}{\tan\alpha} - 2\cos\alpha$$

A) $\cos 2\alpha$　B) $\cos 3\alpha$　C) $\text{sen}3\alpha$
D) $\text{sen}2\alpha$　E) $\tan 3\alpha$

6. Calcula el valor de:

$A = \cos^2 25° + \text{sen}^2 5° - \text{sen}5° \,.\, \cos 25°$

A) 1/2　B) 3/2　C) 2/3
D) 4/3　E) 3/4

7. Si:

$M = \text{sen}(30° + x) - \text{sen}(30° - x)$

$N = \text{sen}(60° + x) - \text{sen}(60° - x)$

Halla: $k = M \times N$

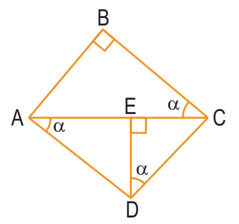
A) 2sen2x　B) $\sqrt{3}\cos 2x$　C) $\sqrt{3}\cos^2 x$
D) $\sqrt{3}\text{sen}^2 x$　E) $(2 - \sqrt{3})\cos^2 x$

8. Simplifica:

$$k = \frac{3\text{sen}^2 x + \text{sen}^2 2x}{4\text{sen}x} - 3\text{sen}^3 x$$

A) cos2x　B) sen3x　C) cos3x
D) sen2x　E) tanx

9. Si: ED = 4 y BC = 6. Calcula: $1 - \text{sen}\alpha$



A) 1/3　B) 2/3　C) 1/2
D) 3/5　E) 2/5


Unidad 4
Trigonometría

RECUERDA

Isacc Newton (1642-1727)

Científico y matemático inglés nacido en Wolsthorpe y fallecido en Londres. Newton ha sido considerado por muchos como la mayor inteligencia que jamás ha existido. Su padre murió antes del nacimiento del enfermizo Isaac y su madre se volvió a casar cuando su hijo tenía tres años. El muchacho fue criado por su abuela, hasta que un tío suyo se dio cuenta de su inteligencia inusual y convenció a su madre para que lo matriculase en Cambridge.

A finales de 1664 Newton, tras estudiar las obras de Euclides, Kepler, Vieta y sobre todo la de Wallis, parecía haber alcanzado las fronteras de los conocimientos matemáticos de la época y se encontraba preparado para hacer sus propias contribuciones originales. Sus primeros descubrimientos que datan de 1665, se derivan de su habilidad para expresar funciones en términos de series infinitas. También empezó a pensar por esas fechas, en la velocidad del cambio o fluxión de magnitudes que varían de manera continua, o fluentes tales como longitudes, áreas, volúmenes, distancias, temperaturas.

En 1966, la peste asoló Londres y se retiró a la finca de su madre huyendo del peligro, y fue durante ese período cuando llevó a cabo sus principales descubrimientos: el teorema binomial, el cálculo, la ley de la gravitación y la naturaleza de los colores. Sus obras más importantes son: *Philosophiae naturalis* principia *mathematica*, el tratado más admirado de todos los tiempos, en el que se presentan los fundamentos de la Física y la Astronomía formulados en el lenguaje de la geometría pura; *Methodus fluxionum et serierum infinitorum*, en donde se describe el método de fluxiones para explicar sus métodos infinitesimales; *Optics*, en donde se describen los experimentos con la luz y el color que le condujeron a enunciar teorías sobre la naturaleza de la luz; *Arithmetica universalis*, famoso tratado que contiene las fórmulas para las sumas de las potencias de las raíces de una ecuación algebraica.

Sin embargo, a pesar de sus propias contribuciones al Álgebra, Newton parece haber preferido el análisis geométrico de los antiguos, y en consecuencia la sección más larga de *Arithmetica universalis*, es la que está dedicada a la resolución de cuestiones geométricas.

Reflexiona

- *Como las abejas, que sacan miel de toda clase de flores, así hemos de esforzarnos en imitar al prójimo en todo lo que notamos de bueno en su conducta.*
- *No tomar por lo trágico las cosas sencillas y simplificar las cosas trágicas.*
- *Las abejas no trabajan sino en la oscuridad; el pensamiento no trabaja sino en el silencio y en el secreto la virtud.*
- *Retírate dentro de ti mismo, sobre todo cuando necesites compañía.*

¡Razona...!

Halla el número que no corresponde en la siguiente sucesión:

2; 3; 5; 8; 11; 13;...

A) 2　　B) 8　　C) 5
D) 11　　E) 13



Aplicamos lo aprendido



TEMA 1: FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

1 Halla el rango de:

$f(x) = 7\cos^2x + 2$

A) [–1; 1]   B) [2; 7]   C) [1; 3]
D) [–7; –2]   E) [2; 9]

2 Dada la función definida por:

$f(x) = 5|\operatorname{sen}x| + 6$

Halla su rango.

A) [6; 11]   B) [3; 10]   C) [5; 6]
D) [2; 4]   E) [5; 12]

3 Halla el rango de:

$f(x) = \dfrac{15}{\cos x + 4}$

A) [2; 15]   B) [1; 4]   C) [3; 5]
D) [–1; 1]   E) $\left[\frac{4}{15}; 1\right]$

4 Halla el dominio de:

$M = 7\sec^3x + 2$

A) $\mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{6} / n \in \mathbb{Z}\right\}$
B) $\mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{3} / n \in \mathbb{Z}\right\}$
C) $\mathbb{R} - \left\{\frac{n\pi}{2} / n \in \mathbb{Z}\right\}$
D) $\mathbb{R} - \{n\pi / n \in \mathbb{Z}\}$
E) $[0; 2\pi]$

5 Halla el máximo valor de:

$f(x) = (\operatorname{sen}x - 8)\operatorname{sen}x + 7$

A) 17   B) 25   C) 9
D) 8   E) 16

6 Si $x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ y [a; b] es el rango de la función:

$f(x) = 2\cos x + 5$

Calcula: a + b

A) 10   B) 11   C) 12
D) 13   E) 14

7 Halla el dominio de la función:

$f(x) = 5\sqrt{\cos x - 1}$

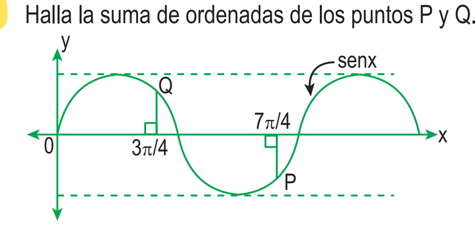
A) $\{2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$
B) $\left\{\frac{k\pi}{2} \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$
C) $\left\{(k+1)\frac{\pi}{2} \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$
D) $\{k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$
E) $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right]$

8 Determina el dominio de:

$f(x) = \dfrac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$

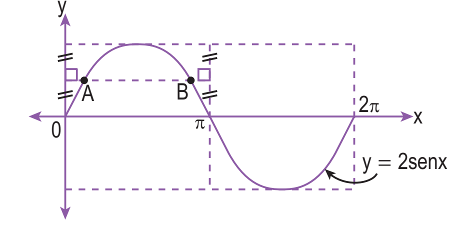
A) $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$
B) $[-\pi\,;\, \frac{\pi}{3}]$
C) $\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$
D) $\mathbb{R}$
E) $\mathbb{R} - \{k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$

9 Halla la suma de ordenadas de los puntos P y Q.



A) $-2\sqrt{2}$
B) $-\sqrt{2}$
C) 0
D) $\sqrt{2}$
E) $2\sqrt{2}$

10 Del gráfico mostrado, calcula el área de la región triangular AOB.



A) $\frac{\pi}{8}$
B) $\frac{\pi}{4}$
C) $\frac{\pi}{3}$
D) $\frac{\pi}{6}$
E) $\frac{\pi}{2}$

11 Sea una f es función definida por $f(x) = \cot x$, con rango $\left[-\sqrt{3};\, \sqrt{3}\right]$ y el dominio contenido en $[0; \pi]$. Si el dominio de f es $[m; n]$, determina: $m + n$

A) $\frac{\pi}{2}$
B) π
C) $\frac{3\pi}{2}$
D) $\frac{4\pi}{5}$
E) $\frac{5\pi}{2}$

12 Sea f una función cuya regla de correspondencia es:

$f(x) = \operatorname{sen} x + \cot x.\cos x - 1$

Determina su rango.

A) $\mathbb{R} - \langle -1; 1\rangle$
B) $\mathbb{R} - [1; 1]$
C) $\mathbb{R} - [-2; 0]$
D) $\mathbb{R} - \langle -2; 0\rangle$
E) $\mathbb{R} - \langle -1; 0\rangle$

13 Halla el dominio y el rango de:

$h(x) = \dfrac{\sec 2x}{\csc 4x}$

A) $\text{Dom}h = \mathbb{R} - \{n\pi\} \,/\, n \in \mathbb{Z}$, $\text{Ran}h = \langle -2; 2\rangle - \{0\}$

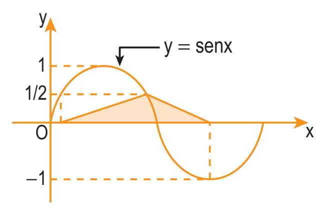
B) $\text{Dom}h = \mathbb{R} - \frac{n\pi}{3} \,/\, n \in \mathbb{Z}$, $\text{Ran}h = \langle -2; 2\rangle - \{0\}$

C) $\text{Dom}h = \mathbb{R} - \frac{n\pi}{4} \,/\, n \in \mathbb{Z}$, $\text{Ran}h = \langle -2; 2\rangle$

D) $\text{Dom}h = \mathbb{R} - \frac{n\pi}{2} \,/\, n \in \mathbb{Z}$, $\text{Ran}h = \langle -2; 2\rangle - \{0\}$

E) $\text{Dom}h = \mathbb{R} - \frac{n\pi}{4} \,/\, n \in \mathbb{Z}$, $\text{Ran}h = \langle -2; 2\rangle - \{0\}$

14 Del gráfico mostrado, calcula el área de la región sombreada.



A) $\frac{\pi}{8}$
B) $\frac{\pi}{4}$
C) $\frac{\pi}{3}$
D) $\frac{\pi}{6}$
E) $\frac{\pi}{2}$

Claves

1. E	3. C	5. E	7. A	9. C	11. B	13. E
2. A	4. A	6. D	8. A	10. C	12. D	14. C

Practiquemos



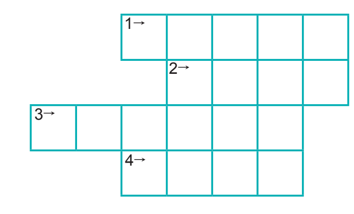
NIVEL 1

Comunicación matemática

1. **Crucigrama:**

Completa el siguiente crucigrama y halla el nombre de un matemático.

1. Conjunto que tiene como elemento a los valores de la variable y.
2. Segunda letra del alfabeto griego.
3. Cateto adyacente entre hipotenusa.
4. Primera letra del alfabeto griego.



2. Grafica un ciclo de la función

$y = 4\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

Razonamiento y demostración

3. Si la función $f(x) = \csc 2x$ tiene como dominio el intervalo:

$\left\langle \frac{5\pi}{8}; \frac{7\pi}{8} \right\rangle$

Determina su rango.

A) $\langle 1; 2 \rangle$ B) $\langle -2; -1 \rangle$ C) $\langle 1; \sqrt{2}]$
D) $\langle -\sqrt{2}; -1]$ E) $\langle -2; -\sqrt{2} \rangle$

4. Determina el rango de la función, definida por:
$f(x) = (\text{sen}x + \cos x - 1)(\text{sen}x + \cos x + 1)$

A) $\langle -1; 1 \rangle$ B) $[-1; 1]$ C) $\langle -1; 1]$
D) $\langle 0; 1 \rangle$ E) $[-1; 1 \rangle$

5. Halla el dominio y rango de la función f definida por:

$f(x) = (\tan x)\frac{\cos x}{\text{sen}x}; (k \in \mathbb{Z})$

A) $\text{Dom}f = \mathbb{R} - \{k\pi\}$ $\quad$ $\text{Ran}f = 0$
B) $\text{Dom}f = \mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{2}\right\}$ $\quad$ $\text{Ran}f = \{1\}$
C) $\text{Dom}f = \mathbb{R} - \{2k\pi\}$ $\quad$ $\text{Ran}f = \{0; 1\}$
D) $\text{Dom}f = \mathbb{R}$ $\quad$ $\text{Ran}f = \{1\}$
E) $\text{Dom}f = \mathbb{R}$ $\quad$ $\text{Ran}f = 0$

6. Halla el período de las siguientes funciones:

I. $f(x) = 2\text{sen}3x + 1$
II. $g(x) = 1 - \tan x/3$
III. $h(x) = 2\cos 4x - 3$

A) $\frac{\pi}{3}; \pi; \frac{\pi}{2}$ B) $\frac{2\pi}{3}; \pi; \frac{\pi}{2}$
C) $\frac{2\pi}{3}; 2\pi; \frac{\pi}{2}$ D) $\frac{\pi}{2}; \pi; \frac{\pi}{2}$
E) $\frac{2\pi}{3}; 3\pi; \frac{\pi}{2}$

7. Halla el dominio de la función f, si su regla de correspondencia es:

$f(x) = 3\tan\left(4x + \frac{3\pi}{2}\right)$

A) $\mathbb{R} - \left\{(n+1)\frac{\pi}{3} / n \in \mathbb{Z}\right\}$
B) $\mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{6} / n \in \mathbb{Z}\right\}$
C) $\mathbb{R} - \left\{(n-1)\frac{\pi}{4} / n \in \mathbb{Z}\right\}$
D) $\mathbb{R} - \left\{(n+1)\frac{\pi}{9} / n \in \mathbb{Z}\right\}$
E) $\mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{5} / n \in \mathbb{Z}\right\}$

8. Si: $\theta \in \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{7\pi}{6}\right]$

Determina el rango de la función f siendo: $f(\theta) = \cos\theta$

A) $\left\langle -1; -\frac{1}{2}\right]$ B) $\left[-1; -\frac{1}{2}\right]$
C) $\left\langle -1; -\frac{1}{2}\right\rangle$ D) $[-1; 0\rangle$
E) $\langle -1; 0 \rangle$

Resolución de problemas

9. Halla el número de puntos de intersección de las gráficas de las funciones $y = \sqrt{x} \wedge y = \text{sen}x$.

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

10. De los puntos que se indican, ¿cuál no pertenece a una sinusoide de variable x?

A) $\left(\frac{5\pi}{2}; 1\right)$ B) $(4\pi; 0)$
C) $\left(-\frac{3\pi}{2}; 1\right)$ D) $\left(\frac{7\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$
E) $\left(-\frac{11\pi}{4}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

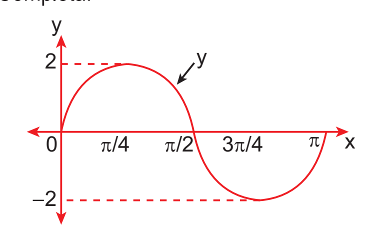
NIVEL 2

Comunicación matemática

11. Indica verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

I. $\text{sen}(x/3) \Rightarrow T = 6\pi$ ( )
II. $\cos(4x) \Rightarrow T = \pi/2$ ( )
III. $\tan(x/2) \Rightarrow T = 2\pi$ ( )

12. Completa:



y =	Rango:
Periodo:	Amplitud:

Razonamiento y demostración

13. Si: $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right\rangle$ y $\text{sen}x = \frac{a}{2} - 1$

Determina el conjunto de valores de a.

A) $2 < a < 4$ B) $3 < a < 4$
C) $1 < a < 4$ D) $2 < a < 5$
E) $3 < a < 4$

14. Dada la función f definida por:
$f(x) = 2|\cos x| + 3; \forall x \in \mathbb{R}$
Halla el rango.

A) $\langle 3; 5 \rangle$ B) $[3; 5\rangle$ C) $[3; 5]$
D) $\langle 3; 5]$ E) $\langle 3; 7 \rangle$

15. Si el punto $A\left(x; \frac{3}{5}\right)$ es un punto que pertenece al gráfico de cosx, calcula el valor de:

$M = \tan x + \cos^2 x \,; 0 < x < \frac{\pi}{2}$

A) $\frac{73}{75}$ B) $\frac{127}{75}$ C) $\frac{83}{75}$
D) $\frac{75}{127}$ E) $\frac{75}{83}$

16. Halla el rango de la función f definida por:

$f(x) = \sqrt{3}|\sec x| \,; \frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{7\pi}{6}$

A) $[\sqrt{3}; 2]$ B) $[2; 2\sqrt{3}]$
C) $\langle \sqrt{3}; 2 \rangle$ D) $\langle 1; 2\sqrt{3} \rangle$
E) $[\sqrt{3}; 2\sqrt{3}]$

17. Si la regla de correspondencia de función f es: $f(x) = 2 + 4\csc^2\left(\frac{x}{3}\right)$. Halla su rango:

A) $[1; +\infty\rangle$ B) $[3; 10]$
C) $[6; +\infty\rangle$ D) $[2; 8\rangle$
E) $[1; 4]$

18. Halla el rango de f, si:
$f(x) = \frac{1 + \text{senx}}{2 + \text{senx}}; \forall\ x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$

A) $\left\langle 0; \frac{2}{3}\right\rangle$ B) $\left[1; \frac{2}{3}\right\rangle$
C) $\left\langle 1; \frac{2}{3}\right\rangle$ D) $\left\langle 0; \frac{2}{3}\right]$
E) $\left[0; \frac{2}{3}\right]$

Resolución de problemas

19. En cuántos puntos interseca la curva y = senx al eje x, en el intervalo $\langle -7\pi/4; 5\pi/2\rangle$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

20. Si H(x) = senx – cosx, halla las coordenadas de los puntos de intersección de H con el eje x, sabiendo que $x \in \langle 0; 2\pi\rangle$.

A) $\left(\frac{\pi}{4}; 0\right); \left(\frac{5\pi}{4}; 0\right)$
B) $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right); \left(\frac{5\pi}{2}; 0\right)$
C) $\left(\frac{\pi}{3}; 0\right); \left(\frac{5\pi}{6}; 0\right)$
D) $\left(\frac{\pi}{6}; 0\right); \left(\frac{5\pi}{3}; 0\right)$
E) $\left(\frac{\pi}{8}; 0\right); \left(\frac{5\pi}{4}; 0\right)$

NIVEL 3

Comunicación matemática

21. Indica verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

I. Las funciones y = tanx e y = cotx tienen el mismo rango. ( )
II. Las funciones y = senx e y = cosx tienen el mismo periodo. ( )
III. El periodo mínimo de y = tan(2x) es $\frac{\pi}{2}$. ( )

22. Relaciona según corresponda:

$y = \lvert\cos x\rvert$	$T = \frac{\pi}{2}$
$y = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$	$T = 2\pi$
$y = \text{sen}\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}$	$T = \pi$

Razonamiento y demostración

23. Halla el máximo valor de:
f(x) = senx(senx – 6) + 4

A) 11 B) 12 C) 13
D) 14 E) 15

24. Sea f una función definida por:

$f(x) = \sec\left(\frac{\pi}{2}\text{senx}\right)$

Si: $x \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$

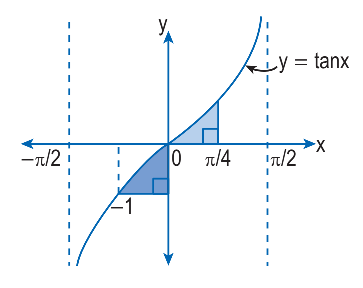
Determina la suma del máximo y mínimo valor de f(x).

A) $\sqrt{2} + 1$ B) $2\sqrt{2} + 1$
C) $\sqrt{2} - 1$ D) $2\sqrt{2} - 1$
E) $3\sqrt{2} + 1$

25. Halla el rango de la función f, cuya regla de correspondencia es:
$f(x) = \sec^2 2x + |2\sec 2x| + |\cot^2 x - \csc^2 x|$

A) $[4; +\infty\rangle$ B) $\langle 4; +\infty\rangle$
C) $\langle 8; +\infty\rangle$ D) $[8; +\infty\rangle$
E) $[3; +\infty\rangle$

26. Dada la gráfica, calcula el área de la región sombreada.



A) $\frac{\pi}{8}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{6}$
D) $\frac{\pi}{3}$ E) $\frac{\pi}{2}$

27. Dada la función f definida por:
$f(x) = \frac{\text{sen}2x}{\tan x}$; $(k \in \mathbb{Z})$

Halla el dominio y rango de la función.

A) $\text{Domf} = \mathbb{R} - \{k\pi\} \land \text{Ranf} = \langle 0; 2]$
B) $\text{Domf} = \mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{2}\right\} \land \text{Ranf} = \mathbb{R}$
C) $\text{Domf} = \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\} \land \text{Ranf} = [0; 2]$
D) $\text{Domf} = \mathbb{R} - \{k\pi\} \land \text{Ranf} = [0; 2]$
E) $\text{Domf} = \mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{2}\right\} \land \text{Ranf} = \langle 0; 2\rangle$

28. Determina el rango de la siguiente función h si su regla de correspondencia es:
h(x) = cotx – tanx – 2tan2x

Donde: $x \in \left\langle -\frac{\pi}{16}; \frac{\pi}{24}\right] - \{0\}$

A) $\mathbb{R} - [-2; 4\sqrt{3}\rangle$ B) $\mathbb{R} - [-4; 4\sqrt{3}\rangle$
C) $\mathbb{R} - [-4; 2\sqrt{3}\rangle$ D) $\langle -2; 4\sqrt{3}]$
E) $\langle -4; 4\sqrt{3}]$

Resolución de problemas

29. Al intersecar las gráficas de y = cscx e y = secx en $\langle 0; 2\pi\rangle$ se obtienen dos puntos A y B. Halla la suma de abscisas y ordenadas de dichos puntos.

A) $\frac{3\pi}{2}$ B) $\frac{3\pi}{4}$
C) $\frac{3\pi}{2} + 2\sqrt{2}$ D) $\frac{5\pi}{4}$
E) $\frac{3\pi}{2} - 2\sqrt{2}$

30. Determina el número de asíntotas que presenta la gráfica de la función y = cotx, si $x \in \left\langle -\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{4}\right\rangle$

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

Claves

NIVEL 1	9. B	17. C	25. A
1.	10. D	18. E	26. B
2.	NIVEL 2	19. D	27. E
3. D	11.	20. A	28. B
4. B	12.	NIVEL 3	29. A
5. B	13. A	21.	30. D
6. E	14. C	22.	
7. C	15. B	23. A	
8. B	16. E	24. A	

Aplicamos lo aprendido





TEMA 2: FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

1 Si: $\alpha = \arctan\frac{\sqrt{7}}{3}$

Calcula: $\cos\alpha$

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ C) $\frac{4}{3}$

D) $\frac{\sqrt{7}}{4}$ E) $\frac{3}{4}$

2 Si: $\alpha = \text{arcsec}2$

Calcula: $\text{sen}\alpha\cos\alpha$

A) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ C) $\frac{3}{5}$

D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{5}{\sqrt{3}}$

3 Calcula:

$N = \text{sen}(\arctan 2)$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

D) $\sqrt{5}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

4 Calcula:

$E = \cos(2\arctan 3)$

A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $-\frac{4}{5}$

D) $\frac{2}{5}$ E) $-\frac{3}{5}$

5 Halla x en:

$\text{arcsen}x = \arccos\frac{2}{3}$

A) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ B) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C) $\frac{3}{2}$

D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

6 Calcula:

$M = \arctan 2 + \arctan 4$

A) $\arctan\frac{6}{7} + \pi$ B) $-\arctan\frac{5}{7} + \pi$

C) $-\arctan\frac{1}{7} + \pi$ D) $-\arctan\frac{2}{7} + \pi$

E) $-\arctan\frac{6}{7} + \pi$

7 Halla x en:

$2\text{arcsen}x + \text{arccos}x = \frac{5\pi}{6}$

A) 1 B) 2 C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{3}{5}$

8 Calcula:

$A = \text{sen}(\arctan\frac{3}{5} + \arctan\frac{1}{4})$

A) $\sqrt{2}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
D) $\frac{17}{28}$ E) $\frac{7}{20}$

9 Calcula:

$B = \tan(\arctan 1 - \arctan\frac{1}{2})$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{5}{4}$

10 Calcula:

$Q = \frac{\text{arcsen}\frac{1}{3}}{\text{arcsen}\left(-\frac{1}{3}\right)}$

A) 1 B) −1 C) 2
D) −2 E) $\frac{1}{2}$

11 Calcula:

$Q = \frac{\arctan 1}{\arccos\frac{1}{2}}$

A) 2 B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{2}$
D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

12 Calcula:

$B = \sec^2(\arctan 3) + \csc^2(\text{arccot}5)$

A) 12 B) 18 C) 24
D) 36 E) 47

13 Calcula x en:

$\arccos\frac{4}{5} + \arccos\frac{12}{13} = \arccos\frac{33}{x}$

A) 33 B) 57 C) 65
D) 63 E) 47

14 Calcula x en:

$\arccos\frac{\sqrt{8}}{3} = \text{arcsen}x$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{\sqrt{8}}{2}$
D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{3}$

Claves

1. E	3. C	5. A	7. D	9. C	11. E	13. C
2. B	4. C	6. E	8. C	10. B	12. D	14. E

Practiquemos



NIVEL 1

Comunicación matemática

1. Completa (V) verdadero o (F) falso según corresponda, luego marca la alternativa correcta.

I. Una función f es inyectiva si y solo si posee un único elemento en el dominio. ( )

II. Una función f es sobreyectiva si y solo si: $\forall\, y \in \text{Ran}(f), \exists\, x \in \text{Dom}(f) / f(x) = y$ ( )

III. Una función f es biyectiva si es inyectiva. ( )

IV. Una función inversa es también una función biyectiva. ( )

A) FVFF B) VVFV C) FVFV
D) VFFV E) FVVV

2. Defina las restricciones de las funciones trigonométricas en el dominio para que sean biyectivas.

Función	Dominio
y = senx	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
y = tanx	
y = secx	
y = cscx	
y = cosx	

Razonamiento y demostración

3. Señala θ a partir de: $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = m$

A) $\text{arccos}m - \frac{\pi}{3}$ B) $\text{arccos}m + \frac{\pi}{3}$
C) $\text{arccos}m + \frac{\pi}{5}$ D) $\frac{3}{\pi} - \text{arccos}m$
E) $\text{arccos}m - \frac{\pi}{6}$

4. Si: $\theta = \text{arccos}\frac{2}{3}$

Calcula tanθ.

A) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ B) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C) $\frac{2}{\sqrt{5}}$
D) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ E) $\frac{3}{2}$

5. Si: $\alpha = \arctan\frac{2}{3}$

Calcula: $P = \text{sen}\alpha\cos\alpha$

A) $\frac{6}{13}$ B) $\frac{12}{13}$ C) $\frac{8}{13}$
D) $\frac{5}{6}$ E) $\frac{5}{13}$

6. Señala θ a partir de: $\text{sen}\frac{3\theta}{2} = x$

A) $\text{arcsen}\frac{2x}{3}$ B) $\frac{2}{3}\text{arcsen}x$ C) $\frac{3}{2}\text{arcsen}x$
D) $\frac{3}{2}\text{arcsen}\frac{2x}{3}$ E) $\frac{1}{3}\,\text{arcsen}\frac{x}{2}$

7. Si: $\theta = \text{arcsen}\frac{1}{5}$

Calcula cotθ.

A) $\sqrt{6}$ B) $2\sqrt{6}$ C) 6
D) $4\sqrt{6}$ E) 2

8. Si: $\theta = \arctan\frac{3}{2}$

Calcula sen2θ.

A) $\frac{12}{13}$ B) $\frac{6}{13}$ C) $\frac{8}{13}$ D) $\frac{5}{13}$ E) $\frac{10}{13}$

9. Calcula: $P = \tan(\arctan4 - \arctan3)$

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{12}$ C) $\frac{1}{7}$ D) $\frac{1}{9}$ E) $\frac{1}{13}$

10. Calcula:

$$R = \frac{\text{arccos}\frac{1}{2} + \text{arccos}\left(-\frac{1}{2}\right)}{\text{arccos}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{3}{4}$
D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{1}{3}$

Resolución de problemas

11. Calcula el rango de la siguiente función definida por:

$M(\alpha) = \text{arcsen}(\cos^4\alpha + \text{sen}^4\alpha)$

A) $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$ B) $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ C) $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right]$
D) $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$ E) $\left\langle\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$

12. Calcula el dominio y rango de la función definida por:
$F(x) = 4\text{arcsen}(4x - 9) + \pi$

A) $x \in [4; 5] \land y \in [-\pi; \pi]$

B) $x \in [2; 4] \land y \in [-2\pi; 2\pi]$

C) $x \in [2; 4] \land y \in [-\pi; 3\pi]$

D) $x \in [2; 5/2] \land y \in [-\pi; 3\pi]$

E) $x \in [5/2; 5] \land y \in [-2\pi; \pi]$

NIVEL 2

Comunicación matemática

13. En el siguiente cuadro completa el rango para cada función trigonométrica inversa según corresponda:

Función	Dominio	Rango
y = arcsenx	$[-1; 1]$	
y = arcsecx	$\langle -\infty; -1] \cup [1; +\infty\rangle$	
y = arctanx	$\mathbb{R}$	
y = arccosx	$[-1; 1]$	
y = arccscx	$\langle -\infty; -1] \cup [1; +\infty\rangle$	

14. De las siguientes proposiciones respecto a las funciones trigonométricas inversas:

- Si $x \in [-1; 1]$
  $\Rightarrow \text{arcsen}x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$
- Si $x \in \mathbb{R} - \langle -1; 1\rangle$
  $\Rightarrow \text{arccsc}x + \text{arcsec}x = \pi$
- Si $ab > 1$; $a < 1 \wedge b < 1$
  $\Rightarrow \arctan(a) + \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) - \pi$
- $\theta = \text{arcsen}x \Leftrightarrow \text{sen}\theta = x \wedge \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
- $\theta = \arccos x \Leftrightarrow \cos\theta = x \wedge \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

¿Cuántas son verdaderas?

A) 5 B) 2 C) 3
D) 1 E) 4

Razonamiento y demostración

15. Si: $\alpha = \arctan\frac{1}{3}$

Calcula: $P = \text{sen}\alpha\cos\alpha$

A) 0,1 B) 0,2 C) 0,3
D) 0,4 E) 0,5

16. Si: $\alpha = \text{arcsec}2\sqrt{2}$

Calcula $\cos 2\alpha$.

A) $\frac{3}{4}$ B) $-\frac{3}{4}$ C) $-\frac{1}{3}$
D) $\frac{1}{3}$ E) $-\frac{2}{3}$

17. Calcula:

$$Q = \frac{\text{arcsen}\frac{1}{2} + \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}}{\arctan\sqrt{3}}$$

A) 1 B) 2 C) $\frac{1}{4}$
D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{5}{4}$

18. Calcula:

$$R = \frac{\arctan(-1) + \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}}{\text{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) 2
D) -2 E) $-\frac{1}{2}$

19. Calcula x, si:

$\arctan(\text{sen}^2(\arctan\sqrt{3})) = \text{arcsen}(2x - 1)$

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{5}$
D) $\frac{4}{5}$ E) 1

20. Reduce:

$S = \tan(2\arctan x)\cos^2(\text{arcsen}x)$

A) x B) 2x C) 4x
D) $1 + x^2$ E) $2(1 + x^2)$

21. Calcula: $\cos\left(\text{arcsen}\frac{3}{5} - \arccos\frac{8}{17}\right)$

A) $\frac{36}{85}$ B) $-\frac{11}{85}$ C) $-\frac{19}{85}$
D) $\frac{77}{85}$ E) $-\frac{13}{85}$

22. Calcula: $\text{arcsen}\left(\text{sen}\frac{8\pi}{9}\right) + \arccos\left(\cos\frac{19\pi}{18}\right)$

A) $\frac{19\pi}{18}$ B) $\frac{25\pi}{18}$ C) $\frac{35\pi}{18}$
D) $\frac{17\pi}{18}$ E) $\frac{23\pi}{18}$

23. Calcula:

$M = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \text{arccot}3\right)$

A) 2 B) $\frac{1}{2}$ C) -2 D) $-\frac{1}{2}$ E) 3

Resolución de problemas

24. Halla **x** e **y**, sabiendo que son ángulos positivos menores que 2π pero mayores que $\frac{\pi}{2}$, además, se cumple que:

$\text{sen}x + \cos y = \frac{16}{21}$ y $\cos y - \text{sen}x = \frac{2}{21}$

A) $x = \text{arcsen}\left(\frac{1}{3}\right) \wedge y = \pi - \arccos(3/7)$

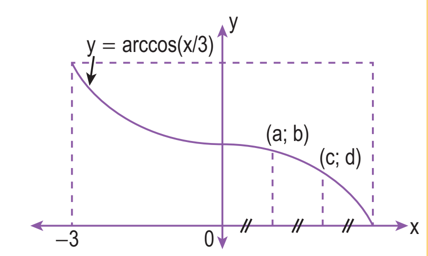
B) $x = \text{arcsen}\left(\frac{2}{3}\right) \wedge y = 2\pi - \arccos(3/7)$

C) $x = \text{arcsen}\left(\frac{1}{3}\right) \wedge y = 2\pi - \arccos(3/7)$

D) $x = \text{arcsen}\left(\frac{2}{3}\right) \wedge y = 2\pi - \arccos(4/7)$

E) $x = \text{arcsen}\left(\frac{1}{3}\right) \wedge y = \arccos(3/7)$

25. Del gráfico, calcula el valor de: a + c – b



A) $1 - \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$

B) $3 - \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$

C) $2 + \arccos\left(\frac{2}{3}\right)$

D) $3 + \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$

E) $1 + \arccos(1)$

NIVEL 3

Comunicación matemática

26. Compara las siguientes cantidades.

$$M = \arccos\left(\frac{2}{3}\right) + \text{arcsen}\left(\frac{2}{3}\right) + \arccos\left(\frac{1}{3}\right) + \text{arcsen}\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$N = \arctan\left(\frac{4}{5}\right) + \arctan\left(\frac{5}{4}\right) + \text{arccot}\left(\frac{5}{4}\right) + \text{arccot}\left(\frac{4}{5}\right)$$

A) M = 2N B) 2M = N

C) $M + N = \frac{\pi}{2}$ D) M = N

E) $M - N = \frac{\pi}{2}$

27. De las siguientes proposiciones:

- $\text{arcsen}[\text{sen}(\pi)]$
- $\arctan\left[\tan\left(+\frac{\pi}{3}\right)\right]$
- $\text{arcsen}\left[\sec\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$
- $\arccos[\cos(0)]$
- $\text{arccsc}\left[\csc\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right]$

¿Cuántas existen en $\mathbb{R}$?

A) 5 B) 4 C) 2
D) 1 E) 3

Razonamiento y demostración

28. Calcula:

$T = (\arctan 2 + \text{arccot} 2)(\text{arcsec} 3 + \text{arccsc} 3)$

A) $\frac{\pi^2}{2}$ B) $\frac{\pi^2}{4}$ C) $\frac{\pi^2}{16}$

D) $\frac{\pi^2}{8}$ E) $\frac{\pi^2}{5}$

29. Calcula x, si:

$2\text{arcsen}x = 3\arccos x$

A) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

C) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ D) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

E) $\frac{\sqrt{5}-1}{8}$

30. Calcula:

$$\frac{\text{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right)\arccos x}{\arccos\left(\frac{1}{2}\right)} + \frac{\text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\text{arcsen}x}{\text{arcsen}(1)}$$

A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{8}$

D) $\frac{\pi}{12}$ E) $\frac{\pi}{6}$

31. Simplifica:

$$E = \frac{\tan(3\text{arcsen}x + 2\arccos x)}{\tan(3\text{arcsen}x + 4\arccos x)}$$

A) 1 B) –1 C) 0
D) 2 E) –2

32. Calcula:

$\arctan\frac{1}{6} + \arctan\frac{5}{7}$

A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{4}$

D) $\frac{\pi}{6}$ E) $\frac{\pi}{5}$

33. Calcula x, si:

$\arctan 2 + \arctan 3 = \text{arcsec}x$

A) $-2\sqrt{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{2}$
D) 1 E) $-\sqrt{2}$

34. Calcula A + B.

$$A = \text{sen}^2\left(\arccos\frac{1}{2}\right) + \cos^4\left(\text{arcsen}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$B = \csc^2(\text{arccot}3) - \sqrt{6}\cot\left(\text{arcsen}\frac{1}{5}\right)$$

A) –2 B) –1 C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2

35. Calcula: sen(2arctan2)

A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{1}{5}$ D) 1 E) $\frac{3}{7}$

Resolución de problemas

36. Determina el rango de la función T, definida por:

$$T(x) = \sqrt{\arctan x - \frac{\pi}{4}} + \text{arcsen}x$$

A) $\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ B) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

C) $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$ D) $[0; \pi\rangle$

E) $\left\langle-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$

37. Halla el rango de la siguiente función:

$A(x) = ||\text{arcsen}x| + 2\arccos x|$

A) $\left[-5\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ B) $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ C) $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$

D) $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ E) $\left\{\frac{5\pi}{2}\right\}$



Claves

NIVEL 1				
1. C	8. A	15. C	23. B	30. B
2.	9. E	16. B	24. C	31. B
3. A	10. D	17. E	25. B	32. C
4. B	11. A	18. A	NIVEL 3	33. E
5. A	12. D	19. D	26. D	34. B
6. B	NIVEL 2	20. B	27. E	35. A
7. B	13.	21. D	28. B	36. A
	14. B	22. A	29. B	37. B

Aplicamos lo aprendido



TEMA 3: ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

1 Resuelve:

$\cos\left(\frac{x}{6}\right) = 1$

A) $2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
B) $\frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$
C) $(2k + 1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$
D) $12k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
E) $6k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

2 Suma las dos primeras soluciones positivas de la ecuación:

$\cos x = \frac{1}{7}$

A) 180°
B) 210°
C) 220°
D) 240°
E) 360°

3 Resuelve:

$x + y = 90°$

$\text{sen}x = \sqrt{3}\,\text{sen}y$

A) 15° y 75°
B) 45° y 45°
C) 60° y 30°
D) 53° y 37°
E) 18° y 72°

4 Resuelve: $\frac{\text{sen}2x}{\text{sen}x} = 1$

Halla la segunda solución positiva.

A) 300°
B) 60°
C) 90°
D) 105°
E) 120°

5 Indica una solución de la ecuación:

$\cos 3x + 2\cos x = 0$

A) 0°
B) 30°
C) 120°
D) 150°
E) 180°

6 La tercera solución positiva que verifica la ecuación:

$\text{sen}x + \cos 2x = 0$ es:

A) 150°
B) 180°
C) 210°
D) 270°
E) 330°

7 Resuelve: $\text{sen}^4x + \cos^4x = \frac{5}{8}$

Da el número de soluciones entre $[0; \pi]$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

8 Halla la suma de las dos primeras soluciones positivas de la ecuación:
$\tan x + \cot x = 2$

A) 90° B) 180° C) 270°
D) 360° E) 540°

9 Resuelve:
$2(\text{sen}x + \cos x) = \sec x$

A) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ B) $k\pi$ C) $\frac{k\pi}{4} - 6$
D) $\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ E) $\frac{k\pi}{3} + 6$

10 Calcula la suma de las tres primeras soluciones positivas de:
$\text{sen}(5x - 10°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

A) 111° B) 123° C) 135°
D) 119° E) 121°

11 Dada la ecuación $2\tan 2x \tan x = 1 - \tan^2 x$, determina la menor solución positiva.

A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{8}$ C) $\frac{3\pi}{8}$
D) $\frac{5\pi}{8}$ E) $\frac{\pi}{3}$

12 Resuelve e indica la solución general:
$\tan 8x - \tan 4x = 0$; $(k \in \mathbb{Z})$

A) $\frac{k\pi}{2}$ B) $\frac{k\pi}{4}$ C) $\frac{k\pi}{8}$
D) $\frac{k\pi}{2}$ E) $k\pi$

13 Suma las dos primeras soluciones positivas de la ecuación:
$\sec^2x = \sqrt{3}\tan x + 1$

A) 180° B) 240° C) 270°
D) 300° E) 360°

14 Resuelve e indica la solución principal de:
$\text{sen}2x + \text{sen}4x + \text{sen}x = 0$

A) 0 B) π C) 2π
D) 3π E) 4π

Claves

1. D	3. C	5. C	7. D	9. A	11. B	13. B
2. E	4. A	6. E	8. C	10. B	12. B	14. A

Practiquemos



NIVEL 1

Comunicación matemática

1. Si $E_G = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{3}$

Completa:

$k = 0$; $E_G =$
$k = 1$; $E_G =$
$k = 2$; $E_G =$
$k = 3$; $E_G =$

2. Relaciona según corresponda:

FT	VP
sen	$[0; \pi]$
cos	$\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$
tan	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$



Razonamiento y demostración

3. Halla el conjunto solución de la ecuación:

$\text{sen}6x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

A) $\left\{\frac{k\pi}{3} + (-1)^k \frac{\pi}{12} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

B) $\left\{\frac{k\pi}{6} + (-1)^k \frac{\pi}{8} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

C) $\left\{k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{18} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

D) $\left\{\frac{k\pi}{18} + (-1)^k \frac{\pi}{6} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

E) $\left\{\frac{k\pi}{6} + (-1)^k \frac{\pi}{18} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

4. Halla el conjunto solución de la ecuación: $\text{sen}4x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

A) $\left\{k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{4} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

B) $\left\{k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{16} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

C) $\left\{\frac{k\pi}{16} + (-1)^k \frac{\pi}{4} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

D) $\left\{\frac{k\pi}{4} + (-1)^k \frac{\pi}{16} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

E) $\left\{\frac{k\pi}{2} + (-1)^k \frac{\pi}{16} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

5. Halla el conjunto solución de la ecuación: $\cos4x = \frac{1}{2}$

A) $\left\{2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$ B) $\left\{2k\pi \pm \frac{\pi}{12} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

C) $\left\{2k\pi \pm \frac{\pi}{24} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$ D) $\left\{\frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

E) $\left\{\frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{24} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

6. Halla el conjunto solución de la ecuación: $\cos8x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

A) $\left\{k\pi \pm \frac{\pi}{16} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$ B) $\left\{2k\pi \pm \frac{\pi}{32} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

C) $\left\{\frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{32} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$ D) $\left\{\frac{k\pi}{4} \pm \frac{\pi}{32} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

E) $\left\{\frac{k\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

7. Halla el conjunto solución de la ecuación: $\tan2x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

A) $\left\{k\pi + \frac{\pi}{12} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$ B) $\left\{2k\pi + \frac{\pi}{12} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

C) $\left\{\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$ D) $\left\{\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

E) $\left\{k\pi + \frac{\pi}{6} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

8. Halla el conjunto solución de la ecuación: $\tan5x = 0$

A) $\left\{\frac{k\pi}{10} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$ B) $\left\{\frac{k\pi}{5} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$ C) $\{5k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$

D) $\{k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$ E) $\left\{\frac{k\pi}{2} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

9. Halla la suma de las 3 primeras soluciones positivas de la ecuación: $\text{sen}3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

A) 180° B) 375° C) 275° D) 475° E) 315°

10. Halla la suma de las 3 primeras soluciones positivas de la ecuación: $\cos3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

A) 255° B) 265° C) 275° D) 285° E) 295°

NIVEL 2

Comunicación matemática

11. Marca verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

I. Para el seno:
$E_G = k\pi + (-1)^k \text{VP}$ ( )

II. Para el coseno:
$E_G = 2k\pi \pm \text{VP}$ ( )

III. Para la tangente:
$E_G = k\pi + \text{VP}$ ( )

12. Relaciona según corresponda:

$\text{senx} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$VP = -\frac{\pi}{6}$
$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$VP = \frac{\pi}{3}$
$\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$	$VP = \frac{\pi}{4}$

Razonamiento y demostración

13. Halla la suma de las tres primeras soluciones positivas de la ecuación:

$\tan 4x = -\sqrt{3}$

A) 150° B) 180° C) 285°
D) 210° E) 225°

14. Halla el conjunto solución de la ecuación:

$\tan\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

A) $\left\{\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

B) $\left\{\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{12} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

C) $\left\{k\pi + \frac{\pi}{3} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

D) $\left\{k\pi + \frac{\pi}{2} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

E) $\left\{\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

15. Halla la suma de las cuatro primeras soluciones positivas de la ecuación:

$\text{sen}(2x - 10°) = \frac{1}{2}$

A) 510° B) 520° C) 560°
D) 600° E) 630°

16. Halla la suma de las cuatro primeras soluciones positivas de la ecuación:

$\text{sen}(5x - 10°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

A) 214° B) 224° C) 234°
D) 244° E) 245°

17. Halla la suma de las tres primeras soluciones positivas de la ecuación:

$\cos(2x - 14°) = \frac{1}{2}$

A) 311° B) 361° C) 411°
D) 421° E) 431°

18. Halla la suma de las tres primeras soluciones positivas de la ecuación:

$\cos\left(3x + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

A) $\frac{25\pi}{24}$ B) $\frac{9\pi}{8}$ C) $\frac{31\pi}{24}$
D) $\frac{29\pi}{24}$ E) $\frac{11\pi}{8}$

19. Halla la suma de las cuatro primeras soluciones positivas de la ecuación:

$\tan(5x + 20°) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

A) 184° B) 204° C) 224°
D) 244° E) 264°

20. Halla la suma de las cuatro primeras soluciones positivas de la ecuación:

$\tan(5x - 20°) = \sqrt{3}$

A) 210° B) 280° C) 290°
D) 300° E) 330°

NIVEL 3

Comunicación matemática

21. Si coskx = x
Completa:

VP =
EG =
x =

22. Relaciona según corresponda:

$\tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$	$VP = \frac{2\pi}{3}$
$\cos 7x = -\frac{1}{2}$	$VP = -\frac{\pi}{4}$
$\text{sen}\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$VP = \frac{\pi}{3}$

Razonamiento y demostración

23. Halla el conjunto solución en:

$\tan(4x - 25°) = 2 - \sqrt{3}$

A) $\left\{\frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

B) $\left\{\frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{4} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

C) $\left\{\frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{6} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

D) $\left\{\frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{4} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

E) $\left\{\frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{4} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

24. Halla la segunda solución positiva de la ecuación:

$4\text{sen}^2x - 4\text{senx} + 1 = 0$

A) 30° B) 120° C) 150°
D) 210° E) 330°

25. Halla la tercera solución positiva de la ecuación: $2\cos^2x + 2 = 5\cos x$

A) 300° B) 120° C) 420°
D) 390° E) 520°

26. Halla la tercera solución positiva de la ecuación: $10\cos^2x + 4 = 13\cos x$

A) 120° B) 210° C) 240°
D) 300° E) 330°

27. Halla la segunda solución positiva de la ecuación: $\tan 2x - \tan x = 0$

A) 45° B) 180° C) 90°
D) 225° E) 315°

28. Halla la segunda solución positiva de la ecuación: $\tan x + \cot x = 2$

A) 45° B) 135° C) 225°
D) 315° E) 405°

29. Si: $(\text{senx})^{\cos y} = \sqrt[5]{0{,}216}$; siendo x e y complementarios. Halla: y – x

A) 32° B) 24° C) 16°
D) 18° E) 30°

30. Halla la solución principal que satisface la ecuación: $\text{sen}2x + \cos 2x = \sqrt{2}\,\text{senx}$

A) 15° B) 30° C) 60°
D) 45° E) 18°



Claves

NIVEL 1		NIVEL 2	NIVEL 3	
1.	8. B	14. B	21.	27. B
2.	9. B	15. C	22.	28. C
3. E	10. D	16. B	23. B	29. C
4. D	11.	17. C	24. C	30. D
5. D	12.	18. C	25. C	
6. D	13. E	19. C	26. D	
7. C		20. B		



Aplicamos lo aprendido

TEMA 4: RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

1 Halla el coseno del menor ángulo de un triángulo cuyos lados son proporcionales a 7; 8 y 13.

A) $\frac{17}{26}$ B) $\frac{23}{26}$ C) $\frac{17}{23}$
D) $\frac{19}{23}$ E) $\frac{19}{26}$

2 En un $\triangle ABC$ se cumple que:

$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\cos B} = \frac{c}{\cos C}$$

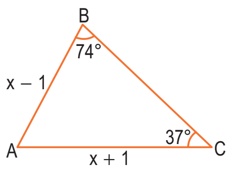
Halla la medida del ángulo A.

A) 45° B) 30° C) 90°
D) 60° E) 135°

3 En un triángulo PQR, se sabe $p = 3$; $r = 2$, además $m\angle P = 2m\angle R$. Halla el valor de q.

A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) 2
D) 3 E) $\frac{7}{2}$

4 Del siguiente gráfico:



Halla al valor de x.

A) $\frac{11}{3}$ B) 2 C) $\frac{7}{5}$
D) $\frac{13}{3}$ E) $\frac{15}{4}$

5 En un triángulo ABC de lados a; b y c respectivamente, se sabe que $\frac{a}{c} = \frac{2}{9}$.

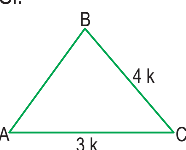
Calcula: $k = \frac{\text{sen}C}{\text{sen}A}$

A) $\frac{9}{2}$ B) 2 C) 1
D) $\frac{2}{9}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

6 Simplifica la siguiente expresión:

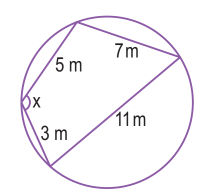
$$M = \frac{\text{sen}A + \text{sen}B}{\text{sen}A - \text{sen}B}$$

Si:



A) 9 B) $\frac{5}{7}$ C) 7
D) $\frac{11}{7}$ E) 5

7 Halla cosx.



A) $-\frac{17}{23}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{11}{7}$
D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{1}{184}$

8 Calcula el radio de la circunferencia.

A) 14 B) 12 C) 20
D) 10 E) 15

9 En un triángulo ABC, $a = 12$, $b = 10 \wedge m\angle C = 53°$. Calcula c.

A) 10 B) 5 C) 7
D) 8 E) 9

10 En el $\triangle ABC$ se tiene: $a = 2x$, $b = 3x$, $c = 4x$, calcula:

$$M = \frac{\text{sen}A}{\text{sen}B} + \frac{\text{sen}B}{\text{sen}C} + \frac{\text{sen}A}{\text{sen}C}$$

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{7}{12}$ C) $\frac{23}{12}$
D) $\frac{17}{12}$ E) $\frac{\sqrt{19}}{2}$

11 Los lados de un triángulo miden k; mk; 2mk. Calcula el valor de "m" sabiendo que el ángulo opuesto a k mide 120°.

A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ C) $\frac{2\sqrt{7}}{7}$
D) $\sqrt{7}$ E) $2\sqrt{7}$

12 En un triángulo ABC de lados a; b y c respectivamente, simplifica la siguiente expresión:

$$M = \left[\frac{a}{b} + \frac{(b+c)}{ab}(b-c)\right]\sec C$$

A) $\frac{1}{4}$ B) -2 C) $\frac{1}{2}$
D) 1 E) 2

13 En un $\triangle$ ABC se cumple:

$\frac{a+b}{a+c} = \frac{c-a}{b}$, calcula $m\angle C$.

A) 30° B) 45° C) 60°
D) 75° E) 120°

14 En un triángulo, un lado mide 40 m y los ángulos adyacentes 37° y 16°. Determina su perímetro.

A) 42 m B) 36 m C) 60 m
D) 72 m E) 84 m

Claves

1. B	3. C	5. A	7. A	9. A	11. B	13. E
2. C	4. D	6. C	8. D	10. C	12. E	14. E

Practiquemos

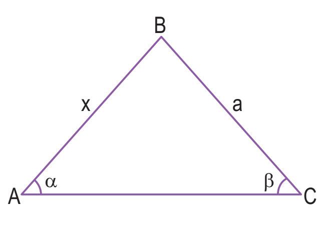


NIVEL 1

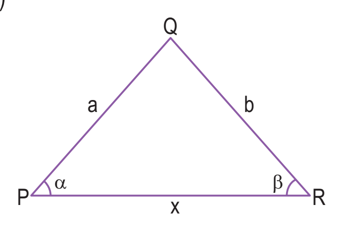
Comunicación matemática

1. Indica el teorema que usarías para hallar el valor de “x”.

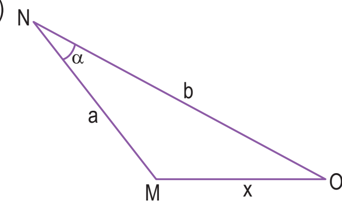
a)



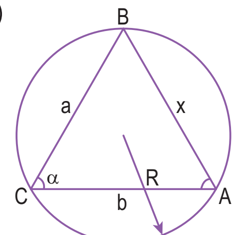
b)



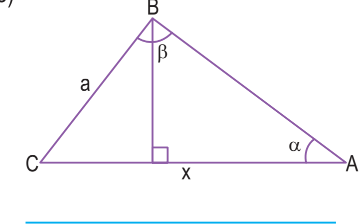
c)



d)

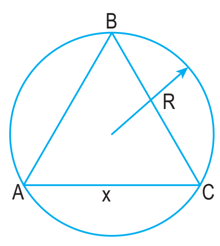


e)



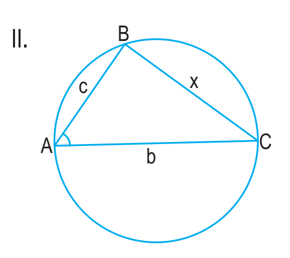
2. En el espacio en blanco escribe el valor de “x”.

I.



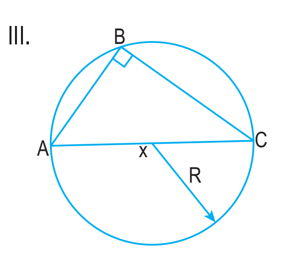
x = ____________

II.



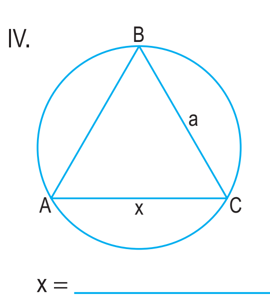
x = ____________

III.



x = ____________

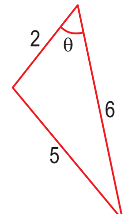
IV.



x = ____________

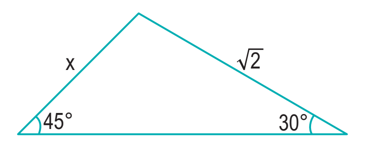
Razonamiento y demostración

3. A partir de la figura determina el valor de $\cos\theta$.



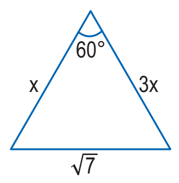
A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{3}{8}$ C) $\frac{5}{8}$ D) $\frac{1}{7}$ E) $\frac{3}{7}$

4. Halla x.



A) 1 B) 2 C) $2\sqrt{2}$
D) $\frac{1}{2}$ E) $2\sqrt{3}$

5. Calcula x.



A) 1 B) 2 C) $\frac{3}{2}$
D) 4 E) $\frac{5}{3}$

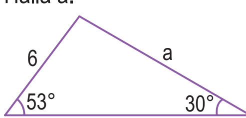
6. En un triángulo ABC: $a = 3$; $b = 2$ y $m\angle C = 60°$. Calcula c.

A) $3\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{6}$ C) $\sqrt{6}$
D) $\sqrt{13}$ E) $\sqrt{7}$

7. Dado un triángulo ABC, simplifica:
$N = a\,\text{sen}B - b\,\text{sen}A$

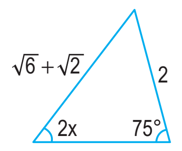
A) bc B) senC C) 0
D) ab E) 2senC

8. Halla a.



A) $\frac{36}{7}$ B) $\frac{48}{5}$ C) $\frac{35}{6}$
D) $\frac{45}{2}$ E) $\frac{32}{3}$

9. Calcula tanx.



A) $4 - \sqrt{17}$ B) $\frac{4 + \sqrt{17}}{2}$
C) $4 + \sqrt{17}$ D) $\frac{4 - \sqrt{17}}{2}$
E) $2 - \sqrt{3}$

Resolución de problemas

10. Encuentra la superficie de un triángulo en el cual dos de sus lados miden 40 y 30 cm, y el logaritmo decimal del seno del ángulo comprendido entre dichos lados es −0,30103.
Dato: (log2 = 0,30103)

A) 1200 cm^2 B) 900 cm^2
C) 1500 cm^2 D) 600 cm^2
E) 800 cm^2

11. Sabiendo que m; n y p son los lados de un triángulo MNP y que a es un ángulo cualquiera.
Halla el valor de:
$Q = m\cos(\alpha - N) + n\cos(\alpha - M)$

A) $p\,\text{sen}\alpha$ B) $2p\cos\alpha$ C) $p\cos 2\alpha$
D) $p\cos\alpha$ E) $p\,\text{sen}2\alpha$

NIVEL 2

Comunicación matemática

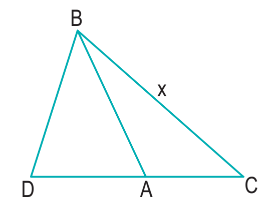
12. De las siguientes expresiones respecto a un triángulo ABC de lados a; b y c.

- $a = b\cos C + c\cos B$
- $b = b\cos C + c\cos B$
- $0 = a\,\text{sen}B - b\,\text{sen}C$
- $0 = b\,\text{sen}C - c\,\text{sen}B$
- $2ac\cos B = b^2 - a^2 - c^2$

¿Cuántas son falsas?

A) 5 B) 3 C) 1
D) 2 E) 4

13. Del gráfico:



I. $m\angle A = 143°$
$AB = 5 \wedge AC = 3$

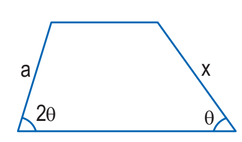
II. $m\angle D = 37° \wedge m\angle C = 45°$
$BD = \frac{5}{3}\sqrt{29}$

Para hallar el valor de x, es necesario:

A) Solo II B) Solo I
C) I y II D) I o II
E) Son necesarios más datos

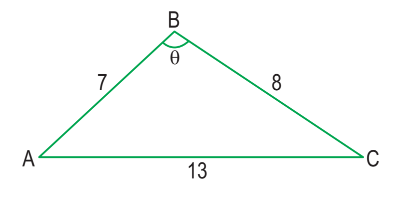
Razonamiento y demostración

14. Halla x, en el siguiente trapecio:



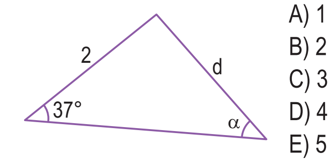
A) $a\cos\theta$
B) $2a\cos\theta$
C) $3\cos\theta$
D) $4a\cos\theta$
E) $2a\,\text{sen}\theta$

15. En el triángulo ABC, halla θ.



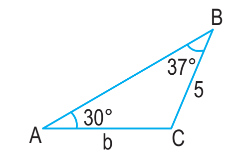
A) 53° B) 75° C) 150°
D) 60° E) 120°

16. Si se tiene que $\cos\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$
Calcula d.



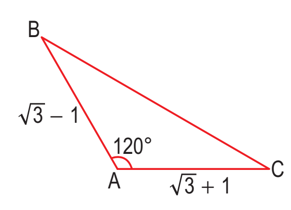
A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

17. Calcula b.



A) 2
B) 4
C) 6
D) 8
E) 10

18. Del gráfico, halla BC:



A) $2\sqrt{2}$ B) $\sqrt{6}$ C) $2\sqrt{3}$
D) $\sqrt{10}$ E) 2

19. En un triángulo ABC, se tiene que:
$$\frac{\text{sen}A}{2} = \frac{\text{sen}B}{3} = \frac{\text{sen}C}{4}$$

Halla el valor de: $J = \dfrac{b^2 + c^2}{b^2 - a^2}$

A) $\frac{25}{12}$ B) $\frac{25}{7}$ C) $\frac{13}{7}$ D) 5 E) $\frac{12}{5}$

20. Sea el triángulo ABC de lados AB = AC y $BC = \sqrt{2}$. Si la bisectriz del ángulo B corta al lado opuesto en el punto D y BD = 1. Entonces, los ángulos A y B son:

A) 60° ; 60° B) 90° ; 45°
C) 100° ; 40° D) 120° ; 30°
E) 150° ; 15°

21. En un triángulo ABC:
$$\frac{a}{\cos A} + \frac{b}{\cos B} + \frac{c}{\cos C} = R$$

Calcula: $E = \tan A \,.\, \tan B \,.\, \tan C$

donde R: circunradio

A) 1 B) 2 C) 1/2 D) 4 E) 1/4

Resolución de problemas

22. Los lados de un triángulo miden 4 cm; $(\sqrt{10} + \sqrt{2})$ cm y $(\sqrt{10} - \sqrt{2})$ cm, respectivamente. Calcula la medida del ángulo formado por los dos últimos lados.

A) 45° B) 53° C) 37° D) 75° E) 60°

23. En un triángulo ABC de lados a; b y c respectivamente, halla el valor de $\text{sen}\left(\frac{A}{2}\right)$, $\cos\left(\frac{A}{2}\right)$ y $\tan\left(\frac{A}{2}\right)$ en función de p, a, b y c, donde p es el semiperímetro del triángulo.

A) $\sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}}$; $\sqrt{\dfrac{(p)(p-a)}{bc}}$; $\sqrt{\dfrac{(p+b)(p-c)}{p(p+a)}}$

B) $\sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}}$; $\sqrt{\dfrac{(p)(p-a)}{ba}}$; $\sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$

C) $\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-c)}{ac}}$; $\sqrt{\dfrac{(p)(p-c)}{ac}}$; $\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-c)}{p(p-c)}}$

D) $\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-c)}{ac}}$; $\sqrt{\dfrac{(p)(p-b)}{ac}}$; $\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-c)}{(p)(p-b)}}$

E) $\sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}}$; $\sqrt{\dfrac{(p)(p-a)}{bc}}$; $\sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$

NIVEL 3

Comunicación matemática

24. Compara las siguientes cantidades:

M La longitud de un poste, cuando el ángulo de elevación del sol es 60°, el poste inclinado en 15° desde la vertical proyecta una sombra de 20 m.

N La longitud de un poste, cuando el ángulo de elevación del sol es 30°, el poste inclinado 30° desde la vertical proyecta una sombra de 40 m.

A) M > N B) 2N = 3M
C) 2N = 5M D) M = N
E) N = 3M

25. Respecto a un triángulo PQR de lados p, q y r completa (V) verdadero o (F) falso según corresponda, en las siguientes proposiciones:

I. $\dfrac{q-r}{q+r}=\dfrac{\tan\left(\dfrac{P-Q}{2}\right)}{\tan\left(\dfrac{P+Q}{2}\right)}$ ( )

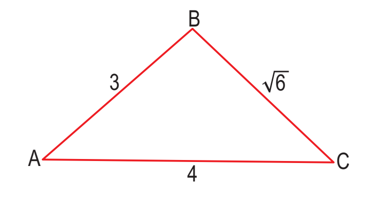
II. $\dfrac{p+q}{p-q}=\dfrac{\tan\left(\dfrac{P+Q}{2}\right)}{\tan\left(\dfrac{P-Q}{2}\right)}$ ( )

III. $x=\left(\dfrac{2qr}{q+r}\right)\cos\dfrac{P}{2}$

x: bisectriz interior relativa al lado p. ( )

Razonamiento y demostración

26. De la figura, calcula el cosA.



A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{5}{4}$ C) $\frac{1}{9}$
D) $\frac{19}{24}$ E) $\frac{24}{19}$

27. En un triángulo ABC: A = 30°; B = 135° y a = 2. Calcula: c

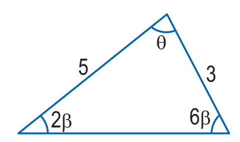
A) $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ B) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$
C) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ D) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
E) $\sqrt{3}-1$

28. En un triángulo ABC, reduce:

$N=\dfrac{a\cos B+b\cos A}{b\cos C+c\cos B}$

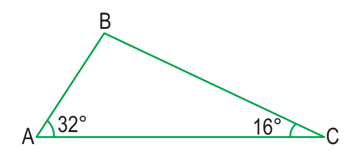
A) $\frac{b}{a}$ B) $\frac{b}{c}$ C) $\frac{c}{a}$
D) $\frac{c}{b}$ E) $\frac{c}{ab}$

29. De la figura, calcula: $1-\cos\theta$



A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{7}{8}$ C) $\frac{1}{5}$
D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{2}{9}$

30. Calcula BC, si AB = 25 m.



A) 26 m B) 30 m C) 48 m
D) 50 m E) 40 m

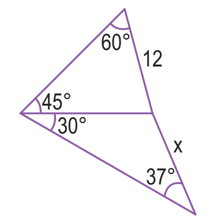
31. Dado un triángulo ABC, donde:

$\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b}{\cos B}=\dfrac{c}{\cos C}$

Determina que tipo de triángulo es:

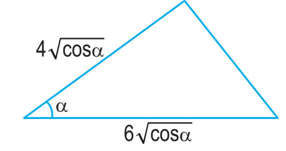
A) Rectángulo B) Isósceles
C) Escaleno D) Equilátero
E) FD

32. Halla el valor de x.



A) $5\sqrt{6}$ B) $\sqrt{11}$ C) $\sqrt{7}$
D) $2\sqrt{6}$ E) $2\sqrt{7}$

33. Halla el área del triángulo:



A) 6senα B) 6sen2α
C) 3sen2α D) 3senα
E) 6sen4α

Resolución de problemas

34. Sea el triángulo ABC de lados AB = AC y BC = $\sqrt{2}$. Si la bisectriz del ángulo B corta al lado opuesto en D y BD = 1, entonces el valor de cos3B es:

A) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{12}{5}$ C) 0
D) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ E) 3

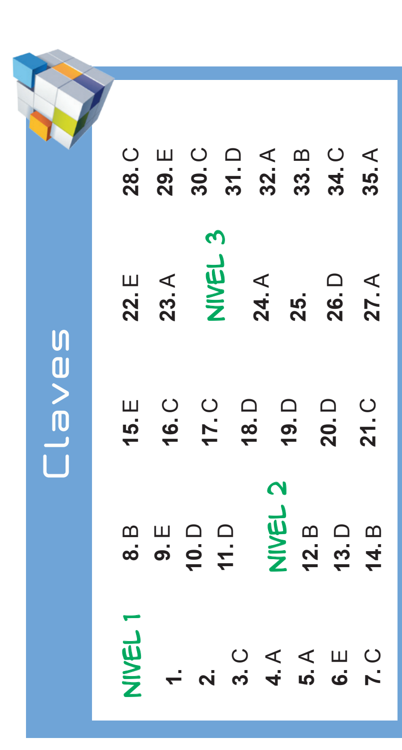
35. En un triángulo ABC de lados a; b y c respectivamente, se cumple que:

$\tan\dfrac{A}{2}\tan\left(\dfrac{B-C}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$

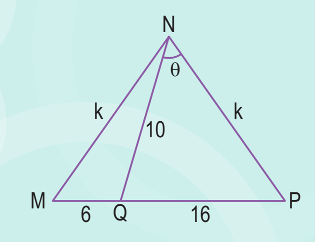
Calcula al valor de:

$M=\dfrac{\text{senB}}{\text{senC}}$

A) $\frac{5}{3}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{4}{3}$
D) $\frac{3}{4}$ E) 1

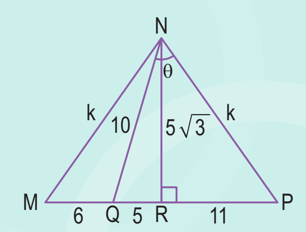


Del siguiente gráfico:



Calcula: $k\cos\theta$

Resolución:



En el ⊾NRP:

$k^2 = 11^2 + (5\sqrt{3})^2 = 196$

$\Rightarrow k = 14$

En el ΔQNP (teorema de cosenos):

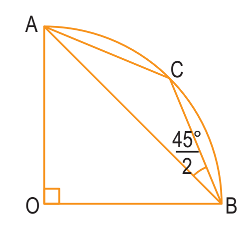
$16^2 = 10^2 + 14^2 - 2(10)(14)\cos\theta$

$256 = 100 + 196 - 2(10)(14)\cos\theta$

$\cos\theta = \dfrac{40}{2(10)(14)} \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{1}{7}$

Luego tenemos: $k \cdot \cos\theta = 14(1/7) = 2$

1. Del gráfico, halla AC si AOB es un sector circular de radio 4.



A) 4 B) $2\sqrt{1+\sqrt{2}}$ C) $2\sqrt{2-\sqrt{2}}$

D) $4\sqrt{2-\sqrt{2}}$ E) $4\sqrt{2+\sqrt{2}}$

2. En un triángulo MNP de lados m; n y p con p = 3/2, se cumple:

$$5\cot\left(\frac{N}{2}\right) = 17\tan\left(\frac{M-P}{2}\right)$$

Calcula el valor de m.

A) $\frac{11}{4}$ B) $\frac{12}{17}$ C) $\frac{7}{11}$

D) $\frac{5}{17}$ E) $\frac{17}{5}$

3. Calcula el valor de:

$A = \arctan 1/8 + \arctan 1/5$

A) arctan(1/2) B) arctan(1/3) C) arctan(3/5)

D) arctan(4/3) E) arctan(2)

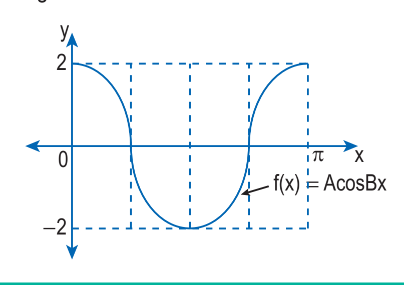
4. Calcula el valor de:

$$R = \arccos\left[\left(\text{sen}\left(\frac{-\pi}{5}\right)\right)\right]$$

A) $\frac{3\pi}{10}$ B) $\frac{2\pi}{5}$ C) $\frac{3\pi}{5}$

D) $\frac{8\pi}{5}$ E) $\frac{7\pi}{10}$

5. Del siguiente gráfico:

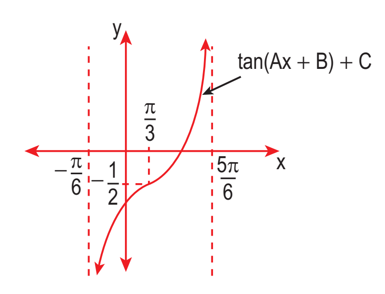


Calcula: A – B

A) 4 B) 2 C) 0

D) 1 E) 3

6. Halla el valor de A.



A) 4 B) 2 C) 0

D) 1 E) 3

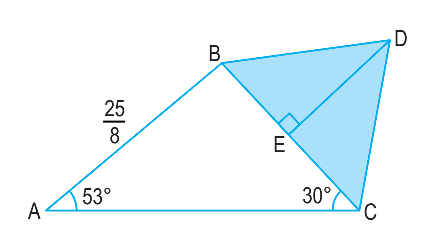
7. Calcula la forma general que toma x en la siguiente ecuación:

$\cos(x/4) = 0; n \in \mathbb{Z}$

A) $2n\pi + \pi$ B) $4n\pi + 2\pi$ C) $4n\pi - 2\pi$

D) $2n\pi - 2\pi$ E) $2n\pi + 2\pi$

8. Del gráfico, calcula el área de la región sombreada si: DE = 6



A) 15 B) 10 C) 16

D) 24 E) 12

9. Halla la menor solución de la siguiente ecuación:

$\cos x = \text{sen}3x + \text{sen}x;\ x \in \langle 0; 2\pi\rangle$

Si: $\cos x \neq 0$

A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{\pi}{12}$ C) $\frac{\pi}{6}$

D) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{9}$